INTRODUÇÃO À TEORIA DAS FUNÇÕES COMPLEXAS

Carlos A. A. Florentino

Dezembro 2015

Conteúdo

Prefácio 5

Capítulo 1. A álgebra e topologia dos números complexos 7
1.1. Aritmética dos números complexos 7
1.2. Noções Topológicas em $\mathbb{C}$ 9
1.3. Continuidade de funções de variável complexa 10
1.4. Polinómios e o Teorema Fundamental da Álgebra 11
1.5. Demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra 12
1.6. Problemas 14

Capítulo 2. Funções diferenciáveis, holomorfas e analíticas 15
2.1. Funções Diferenciáveis e Funções Holomorfas 15
2.2. Séries de Potências 17
2.3. Diferenciabilidade real e complexa: as equações de Cauchy-Riemann 20
2.4. Funções Analíticas e o Teorema de Taylor 21
2.5. Problemas 25

Capítulo 3. Funções Meromorfas e a Esfera de Riemann 27
3.1. Séries de Laurent e Singularidades Isoladas 27
3.2. Funções Meromorfas 29
3.3. Funções Racionais 30
3.4. A esfera de Riemann 31
3.5. Transformações de Möbius 32
3.6. Problemas 36

Capítulo 4. Teoria Local das Funções Holomorfas e Meromorfas 37
4.1. O Teorema da Função Inversa e Isomorfismos Locais 37
4.2. O teorema da aplicação aberta 39
4.3. Princípio dos zeros isolados 40
4.4. Princípio do módulo máximo 41
4.5. Existência de primitivas locais 41
4.6. O teorema de Casoratti-Weierstrass 42
4.7. Problemas 42

Capítulo 5. Funções Harmónicas 45
5.1. Definição e primeiras propriedades 45
5.2. Propriedades locais das funções harmónicas 46
5.3. Propriedades globais de funções harmónicas 46
5.4. O problema de Dirichlet no disco 47
5.5. Problemas 48

Capítulo 6. Cálculo Integral no Plano Complexo 49
6.1. Definição do integral no plano complexo 49
6.2. O teorema fundamental do cálculo 53
6.3. O Teorema de Cauchy-Goursat 56
6.4. O Teorema dos resíduos para regiões convexas 57
6.5. Problemas 58

Capítulo 7. Integração, homologia e dualidade 59
7.1. Motivação para o Teorema de Cauchy "global" 59

7.2. Índice de uma curva fechada em torno de um ponto 59
7.3. Teorema de Cauchy global 61
7.4. Homotopia e Homologia 62
7.5. O Teorema de Cauchy Global 62
7.6. Princípio do argumento 63
7.7. Teorema de Rouché 64
7.8. Problemas 64

Capítulo 8. Convergência e Representação de Funções Inteiras 67
8.1. Convergência em $H(\Omega)$ 67
8.2. A função básica de Eisenstein 68
8.3. Convergência de produtos infinitos de números complexos e de funções 68
8.4. O teorema de Weierstrass para funções inteiras 69
8.5. O teorema de Hadamard 72
8.6. Problemas 72

Capítulo 9. Funções Elípticas 75
9.1. Recticulados e Funções invariantes 75
9.2. Funções elípticas 76
9.3. A função $\wp$ de Weierstrass de um recticulado Λ. 78
9.4. Problemas 80

Capítulo 10. Transformações conformes e o Teorema de Riemann 81
10.1. Definição e Exemplos de Transformações Conformes 81
10.2. Lema de Schwarz e Automorfismos do disco 83
10.3. Automorfismos do Plano 84
10.4. O espaço métrico $C(\Omega)$ 84
10.5. O teorema da aplicação de Riemann 85
10.6. Problemas 87

Capítulo 11. Contínuação Analítica 89
11.1. Princípio de Reflexão de Schwarz 89
11.2. Continuação Analítica ao Longo de Caminhos 90
11.3. Problemas 91

93

93

Índice 93

Bibliografia 95

Prefácio

"O completo conhecimento da natureza de uma função analítica deve também incluir a indicação do seu comportamento para valores imaginários dos argumentos. Muitas vezes, isto é indispensável inclusive *para a correcta apreciação do comportamento da função para argumentos reais."* (C. F. Gauss, Carta a F. W. Bessel, 1811).

A teoria das funções complexas de variável complexa, usualmente designada por *Análise Complexa*, é uma área da Matemática cujos fundamentos remontam ao século XVIII, estando intimamente ligada a muitos matemáticos de renome, tais como Euler, Gauss, Riemann, Cauchy e Weierstrass. É igualmente um assunto de grande utilidade noutras áreas tanto na Matemática Pura como na Matemática Aplicada, na Física e noutras ciências experimentais, sendo por isso, parte integrante de cursos de Engenharia, Física ou Matemática.

Sendo um assunto que sempre mereceu uma vasta literatura, ainda não tem, curiosamente, a desejada correspondência em publicações na língua portuguesa. Recentemente, esta lacuna tem vindo a ser gradualmente preenchida, com alguns livros em que se abordam funções elementares, expansões em série de Taylor e Laurent, e os teoremas de Cauchy e dos resíduos em algumas das suas versões. Esses livros destinam-se essencialmente a alunos dos primeiros dois anos de uma licenciatura de Matemática, Física ou Engenharia.

Prosseguindo esta tendência, este livro pretende abordar aspectos complementares, mas ainda clássicos e fundamentais, da teoria das funções de variável complexa, de grande relevo para inumeras aplicações a outras áreas da Matemática e afins. Assim, este pode ser visto como texto de apoio a uma disciplina dedicada aos fundamentos matemáticos da Análise Complexa, sendo por isso destinado a estudantes de final de Licenciatura ou início de Mestrado em Matemática Pura, Matemática Aplicada ou Física.

CAPíTULO 1

A álgebra e topologia dos números complexos

Um número complexo z pode ser considerado um par (ordenado) de números reais x, y que escrevemos na forma:

$$z = x + iy. \tag{1.0.1}$$

Na representação acima, i denota a unidade imaginária, que verifica todas as usuais regras de manipulação algébrica, e a seguinte relação adicional:

$$i^2 = -1. \tag{1.0.2}$$

O conjunto dos números complexos será designado por $\mathbb{C}$. A relação (1.0.2) é a propriedade fundamental que permite multiplicar números complexos, o que nos leva a considerar a aritmética em $\mathbb{C}$.

Para além da aritmética, neste capítulo estudaremos também a topologia canónica em $\mathbb{C}$, e algumas propriedades geométricas elementares relacionadas com as operações entre números complexos.

1.1. Aritmética dos números complexos

A correspondência entre um número complexo z e o par de números reais $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ na equação (1.0.1) permite pensar no conjunto $\mathbb{C}$ como o plano euclideano, mais precisamente como o espaço vectorial real $\mathbb{R}^2$ (de dimensão 2 sobre o corpo $\mathbb{R}$).

Em $\mathbb{R}^2$ temos as operações de soma de dois vectores e a multiplicação de um vector (em $\mathbb{R}^2$) por um escalar (de $\mathbb{R}$). Por outro lado, em $\mathbb{C}$, usando a relação fundamental (1.0.2) podemos multiplicar dois números complexos. Nesta secção estudamos as propriedades aritméticas dos números complexos.

Temos as seguintes definições, notações e propriedades básicas da aritmética em $\mathbb{C}$:

- A unidade imaginária é i, e verifica $i^2 = -1$.
- Um número complexo é $z = x + iy \in \mathbb{C}$, onde $x, y \in \mathbb{R}$.
- A parte real de $z = x + iy$ é denotada por $\Re z := x$.
- A parte imaginária de $z = x + iy$ é denotada por $\Im z := y$.
- Sendo $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$ dois números complexos, a sua soma e produto são definidos por:
$$z_1 + z_2 := (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2)\,,$$
$$z_1 \cdot z_2 := (x_1 + iy_1)\,(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i\,(x_1y_2 + x_2y_1)\,.$$
- O zero, também chamado origem, é o número complexo $0 = 0 + i0$.
- A unidade é o número complexo $1 = 1 + i0$.
- O inverso de um número complexo $z = x + iy \neq 0$ é dado por:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{(x + iy)\,(x - iy)} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} \tag{1.1.1}$$

Há uma inclusão natural dos números reais nos complexos, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, obtida fazendo

$$x \in \mathbb{R} \quad \mapsto \quad x + i0 \in \mathbb{C}. \tag{1.1.2}$$

Em particular o zero e a unidade do corpo $\mathbb{R}$ têm exactamente o mesmo papel em $\mathbb{C}$ (elementos neutros da adição e multiplicação, respectivamente). A definição de inverso, permite-nos mostrar o primeiro resultado sobre $\mathbb{C}$.

Teorema 1.1. *O conjunto $\mathbb{C}$ de todos os números complexos forma um corpo. Em particular, todos os números complexos têm um inverso excepto o número 0. Além disso $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ é um subcorpo.*

Demonstração. Basta verificar que as operações $+$ e $\cdot$ munem $\mathbb{C}$ da estrutura de um anel comutativo e associativo, com elemento neutro 0, e 1, respectivamente, e que se verifica a distributividade do produto relativa à soma. Deixam-se os detalhes para o leitor. A última frase segue do facto de que o zero e a unidade complexos são também reais, e que a soma e produto (complexas) de dois números reais é um número real. □

Em vez da notação $z_1 \cdot z_2$ para a multiplicação de dois números complexos, vamos escrever simplesmente $z_1 z_2$.

1.1.1. A representação cartesiana e a representação polar: A correspondência entre $z = x + iy \in \mathbb{C}$ e o vector (x, y) do plano $\mathbb{R}^2$ permite representar z num plano com eixos x e y. Do ponto de vista dos números complexos, estes eixos são designados, por razões evidentes, eixo real e eixo imaginário (veja-se a Figura rep-cartesiana).

A fórmula para o inverso (1.1.1), sugere a introdução dos seguintes conceitos.

Definição 1.2. Dado o número complexo $z = x + iy$, define-se:

- o módulo de z é $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$.
- o conjugado de z é $\bar{z} := x - iy$.

É fácil verificar o seguinte.

Proposição 1.3. *Seja z um número complexo. Então $|z|$ representa a distância de z à origem e $\bar{z}$ representa a reflexão de z em relação ao eixo real. Além disso temos $z\bar{z} = |z|^2$ o que nos permite escrever:*

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2},$$

sempre que $z \neq 0$.

Demonstração. A primeira frase deixa-se para o leitor. A segunda é imediata: $z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2 = |z|^2$. □

Corolário 1.4. *Sejam $z, w \in \mathbb{C}$. A distância entre z e w é dada por $|z - w|$. Verificam-se as desigualdades:*

$$||z| - |w|| \leq |z \pm w| \leq |z| + |w|.$$

Demonstração. Basta usar as mesmas propriedades do conceito de distância entre vectores no plano. Deixa-se, por isso, para o leitor (ver a Figura ... paralelogramo). □

Exercício 1.5. Suponha que z e w não são nulos. Mostre que, na fórmula $|z + w| \leq |z| + |w|$, a igualdade verifica-se quando z e w têm o mesmo sentido. Mostre que, na fórmula $||z| - |w|| \leq |z + w|$ a igualdade verifica-se quando z e w têm sentidos opostos. (aqui usamos a noção de sentido para vectores em $\mathbb{R}^2$, quando estes não são nulos).

Usando a definição das funções trigonométricas seno e cosseno, vemos que a representação cartesiana de um número complexo de módulo 1, é sempre da forma $z = \cos\theta + i \sin\theta$. (ver Figura ... trig).

Se multiplicarmos dois números complexos de módulo 1 obtemos

$$\begin{aligned}(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) &= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta) = \\ &= \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\end{aligned}$$

Esta conta muito simples levou Euler a escrever

Proposição 1.6. *(Fórmula de Euler) Para $\theta \in \mathbb{R}$*

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

De modo que a equação anterior fica na forma simples e intuitiva:

$$e^{i\alpha}e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$$

Temos então duas representações de z

- Representação cartesiana: $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$;

- Representação polar de $z : z = re^{i\theta}$, $r \geq 0$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Definição 1.7. Se $z \neq 0, z = re^{i\theta}$, então θ chama-se um argumento de z. O argumento principal de z é o único argumento θ que verifica $\theta \in]-\pi, \pi]$.

Um argumento de z não é único (quando $z \neq 0$) estando definido, a menos de um múltiplo 2π. Da mesma forma, a representação polar não é única.

Observação 1.8. Como caso particular da relação de Euler, obtemos uma elegante relação entre as 5 constantes fundamentais de matemática:

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Esta fórmula é considerada uma das mais belas da matemática.

1.2. Noções Topológicas em $\mathbb{C}$

Tal como em $\mathbb{R}^2$, as noções topológicas no plano complexo $\mathbb{C}$ podem ser definidas através dos conceitos de distância e de disco aberto.

Como vimos, sendo $z = x + iy \in \mathbb{C}$, o número real $|z|$ representa a distância entre z e a origem $0 \in \mathbb{C}$. Da mesma forma, dados dois números complexos $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, o número (real, não negativo)

$$|z_1 - z_2|$$

representa a distância entre z_1 e z_2.

Definição 1.9. Seja $z_0 \in \mathbb{C}$ e r um número real positivo. O disco aberto de raio r, centrado em z_0 é o conjunto de números complexos que estão a uma distância de z_0 inferior a r:

$$\mathbb{D}\left(z_0, r\right) := \left\{z \in \mathbb{C} : \ |z - z_0| < r\right\}.$$

Usando esta classe de conjuntos, fazemos então as definições usuais.

Definição 1.10. Um subconjunto $U \subset \mathbb{C}$ diz-se:

- aberto, se $\forall z_0 \in U$, $\exists r > 0$ tal que $\mathbb{D}\left(z_0, r\right) \subset U$.
- fechado, se for o complementar de um aberto.
- limitado, se $\exists r > 0$ tal que $U \subset \mathbb{D}\left(0, R\right)$.
- compacto, se for limitado e fechado.
- conexo, se não existirem abertos não vazios e disjuntos $A, B \subset \mathbb{C}$ tais que

$$U = \left(A \cap U\right) \cup \left(B \cap U\right).$$

Pela sua importância, e de acordo com a literatura usual, chamaremos região a qualquer subconjunto aberto, conexo e não vazio de $\mathbb{C}$.

Exemplo 1.11. Um disco aberto e o semiplano superior são regiões em $\mathbb{C}$. Como vão aparecer com grande frequência, adoptaremos as seguintes notações:

- Disco aberto de raio $r > 0$ e centrado em $z_0 \in \mathbb{C}$:

$$\mathbb{D}(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : \ |z - z_0| < r\}$$

- Semiplano superior:

$$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \ \Im z > 0\}$$

Usaremos a notação $C(z_0, r)$ para designar a circunferência de centro em z_0 e raio r (ou seja, a fronteira topológica de $\mathbb{D}(z_0, r)$).

Notação. Em todo este livro, Ω designará uma região arbitrária em $\mathbb{C}$. Pela sua relevância, os discos centrados na origem, $0 \in \mathbb{C}$, são também denotados por $\mathbb{D}(r) := \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < r\}$ e o disco unitário ($r = 1$) escreve-se simplesmente como $\mathbb{D} := \mathbb{D}(1)$.

Recorde-se que as noções de disco aberto (às vezes chamados também bolas abertas) permitem definir o que se chama de base para uma topologia, que por sua vez definem uma topologia. Neste caso, a topologia que consideramos em $\mathbb{C}$ é aquela dada pelos discos abertos $\mathbb{D}(z_0, r)$, em que $z_0 \in \mathbb{C}$ e $r > 0$.

Uma vez que estes discos são também discos abertos em $\mathbb{R}^2$ (e vice-versa) o seguinte resultado procede imediatamente das definições de espaço topológico.

Teorema 1.12. *O conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$, com a topologia, é topologicamente isomorfo a $\mathbb{R}^2$.*

Na próxima secção usamos estas noções topológicas, para definir a noção de continuidade de funções de variável complexa.

De facto, tanto o conceito de derivada, como o de continuidade de uma função num ponto são conceitos "locais" que envolve a consideração das vizinhanças desse ponto, sendo insensíveis ao comportamento da função fora dessa vizinhança. É assim natural considerar funções definidas em conjuntos abertos e conexos.

Desta forma, as regiões assumem grande importância no estudo da continuidade e da diferenciabilidade.

1.3. Continuidade de funções de variável complexa

Vamos agora considerar funções contínuas (e seguidamente, funções diferenciáveis) definidas no plano complexo ou numa dada região Ω. A expressão

$$f : \Omega \to \mathbb{C}$$

indica que f é uma função definida na região $\Omega \subset \mathbb{C}$ com valores complexos. Assim, $w = f(z)$ é um número complexo para todo o $z \in \Omega$.

Como a topologia no plano complexo $\mathbb{C}$ é definida através da sua identificação canónica com o plano cartesiano $\mathbb{R}^2$, e uma vez que a continuidade uma noção topológica, é de esperar uma equivalência entre as noções de continuidade de funções de variável complexa e das suas correspondentes funções definidas em $\mathbb{R}^2$.

Vamos explicitar esta equivalência, apesar de ela decorrer de ideias simples e naturais, que por vezes, não merecem especial comentário.

A identificação canónica de $\mathbb{C}$ com $\mathbb{R}^2$ é dada por:

$$\begin{array}{rcl} \iota : \mathbb{C} & \to & \mathbb{R}^2 \\ z & \mapsto & (x, y), \end{array} \tag{1.3.1}$$

onde

$$x = \Re z = \frac{x + \bar{x}}{2}, \qquad y = \Im z = \frac{z - \bar{z}}{2i},$$

e a correspondência inversa é dada por $\iota^{-1}(x, y) = x + iy$.

Esta identificação é assumida implicitamente em grande parte de todos os livros de funções complexas, e, pelas mesmas razões, apenas ocasionalmente iremos usar explicitamente a notação ι.

Por exemplo, sendo $\Omega \subset \mathbb{C}$ uma região no plano complexo, o correspondente subconjunto de $\mathbb{R}^2$ é denotado simplesmente por Ω, em lugar de $\iota(\Omega)$. De igual forma, todas as propriedades topológicas de um subconjunto $A \subset \mathbb{C}$ se transferem para os correspondentes subconjuntos $A \subset \mathbb{R}^2$, e vice-versa.

Definição 1.13. Um subconjunto $A \subset \mathbb{C}$ diz-se fechado (ou compacto, ou aberto, ou conexo, etc) se e só se também o for o subconjunto $A \subset \mathbb{R}^2$.

Uma forma resumida de exprimir o conteúdo desta definição é dizendo que definimos a topologia em $\mathbb{C}$ como sendo a mesma que a de $\mathbb{R}^2$, através da identificação ι. Assim, a aplicação ι (bem como a sua inversa) é contínua (do ponto de vista de uma aplicação entre espaços topológicos, ver apêndice).

Outro exemplo importante é o da convergência das sequências de números complexos, que, por introduzir terminologia que usaremos mais tarde, justifica uma definição explícita.

Definição 1.14. Uma sequência de números complexos $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diz-se convergente se existe um $w \in \mathbb{C}$ tal que, para todo real $\varepsilon > 0$, existe um índice $N \in \mathbb{N}$ verificando

$$|z_n - w| < \varepsilon, \quad \forall n \geq N.$$

Neste caso, diz-se que w é o limite de (z_n), ou que (z_n) converge para w, e escreve-se $z_n \to w$.

Como vemos, esta definição é inteiramente análoga à definição de convergência de uma sucessão $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ de pontos no plano cartesiano $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$, uma vez que usámos a norma de um número complexo, que por sua vez coincide com a norma do correspondente vector em $\mathbb{R}^2$,

$$|z|^2 = x^2 + y^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad |z| = ||\iota(z)||.$$

De facto, tal como previsto, as noções de convergência em $\mathbb{C}$ e em $\mathbb{R}^2$ coincidem. Deixamos para o leitor a verficação do seguinte resultado.

EXERCÍCIO 1.15. Seja $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de números complexos e $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ a correspondente sucessão de vectores em $\mathbb{R}^2$ (ou seja, $\iota(z_n) = (x_n, y_n)$ para todo o n).
(a) Mostre que uma das sucessões converge se e só se a outra converge.
(b) Prove que w é o limite de (z_n) se e só se $\iota(w)$ é o limite de $((x_n, y_n))$.

O conceito de norma no plano complexo, serve também para definir continuidade, de forma idêntica à definição para funções de variável real.

DEFINIÇÃO 1.16. Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função de variável complexa, e $z_0 \in \Omega$. Diz-se que f é contínua no ponto $z_0 \in \Omega$ se

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Tal como no caso de variável real, a equação acima significa o seguinte. Para todo o real $\varepsilon > 0$, existe um outro real $\delta > 0$ tal que

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \quad \forall z \text{ tal que } |z - z_0| < \delta.$$

Numa outra interpretação da noção de continuidade, dizemos que f é contínua em z_0 se para todo o disco aberto $D = \mathbb{D}(f(z_0), r)$ (centrado em $f(z_0)$), o conjunto imagem inversa

$$f^{-1}(D) := \{z \in \Omega : \ f(z) \in D\}$$

contém um disco aberto centrado em z_0. Deixamos ao leitor a demonstração da equivalência entre estas duas formas de olhar para a continuidade.

EXERCÍCIO 1.17. Mostre que as duas definições de continuidade fornecidas acima, são equivalentes.

Terminamos esta secção com a equivalência entre continuidade para funções de variável complexa e para as correspondentes funções definidas no plano cartesiano.

Usando a identificação (1.3.1) entre $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}^2$, a cada função de variável complexa $f : \Omega \to \mathbb{C}$ podemos associar a função $f_{\mathbb{R}^2} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por:

$$f_{\mathbb{R}^2}(x, y) := (u(x, y), v(x, y)), \quad \text{onde} \quad \begin{cases} u(x, y) = \Re\,(f(x + iy)) \\ v(x, y) = \Im\,(f(x + iy))\,. \end{cases}$$

Aqui, u e v são funções reais, chamadas naturalmente, a parte real e imaginária (respectivamente) de f. Graficamente, podemos representar da seguinte forma a relação entre f e $f_{\mathbb{R}^2}$:

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} \\ \iota\wr\downarrow & & \downarrow\wr\iota \\ \Omega & \xrightarrow{f_{\mathbb{R}^2}} & \mathbb{R}^2. \end{array}$$

Ou, de forma abreviada,

$$f_{\mathbb{R}^2} = \iota \circ f \circ \iota^{-1}.$$

PROPOSIÇÃO 1.18. *Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função de variável complexa, e $z_0 \in \Omega$. Então f é contínua no ponto z_0 se e só se $f_{\mathbb{R}^2}$ é contínua no ponto $(x_0, y_0) = \iota(z_0) \in \Omega$.*

DEMONSTRAÇÃO. Decorre de forma imediata do facto de que a composição de funções contínuas é contínua, e que ι (e a sua inversa) é contínua. $\square$

1.4. Polinómios e o Teorema Fundamental da Álgebra

Tal como no caso real, os polinómios formam a classe mais simples de funções de variável complexa. Em particular, veremos que definem funções diferenciáveis em todo o plano complexo $\mathbb{C}$.

Apesar da sua simplicidade, é notável verificar que permitem antever um enorme conjunto de propriedades que serão válidas para todas as funções diferenciáveis no sentido complexo.

DEFINIÇÃO 1.19. Um polinómio de grau n é uma função p que se pode escrever na forma

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n,$$

onde $a_j \in \mathbb{C}$ e $a_n \neq 0$. Uma raíz do polinómio p é um número complexo z_0, tal que $p(z_0) = 0$. Vamos denotar por $\delta p \in \mathbb{N}_0$ o grau de um polinómio não nulo $p(z) \in \mathbb{C}[z]$.[1]

[1] Por consistência com certos resultados, ao polinómio nulo poder-se-ia atribuir o grau $-\infty$.

É fácil verificar que os polinómios podem-se somar e multiplicar, pelas regras usuais, formando assim um anel comutativo designado usualmente por $\mathbb{C}[z]$.

PROPOSIÇÃO 1.20. *Qualquer polinómio $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ define uma função contínua $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.*

DEMONSTRAÇÃO. A função $z \mapsto z^k$ é contínua para todo o $k \in \mathbb{N}$ (verifique isto). A Proposição segue então do facto de que a soma e o produto de funções contínuas é contínua. □

1.4.1. Teorema fundamental da Álgebra. O resultado mais importante sobre polinómios de váriavel complexa é o chamado teorema fundamental da álgebra, que afirma que qualquer polinómio não constante possui uma raíz em $\mathbb{C}$.

TEOREMA 1.21. *[Gauss] Qualquer polinómio complexo não constante tem uma raíz complexa. Por outras palavras, dado um polinómio de grau $n \geq 1$, $p(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n$, existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $p(z_0) = 0$.*

Outra propriedade bem conhecida dos polinómios é o chamado algoritmo de divisão de polinómios, ou algoritmo de Euclides. Dados dois polinómios $p(z)$ e $q(z)$, verificando $\deg p > \deg q$, existem outros dois polinómios $d(z)$ (o divisor) e $r(z)$ (o resto), de forma a que se verifique

$$p(z) = d(z)q(z) + r(z).$$

Os polinómios $d(z)$ e $r(z)$ são únicos se impusermos que $\deg r < \deg q$. Dizemos que um polinómio $q(z)$ divide $p(z)$ se o resto da divisão de $p(z)$ por $q(z)$ é zero.

Usando o algoritmo de divisão de polinómios, existe uma forma alternativa de escrever o Teorema Fundamental da Álgebra. Seja $p(z)$ um polinómio de grau $n > 0$, que admite um zero em z_0. Então, pelo algoritmo de divisão de polinómios, podemos escrever $p(z) = (z - z_0)q(z)$, onde $q(z)$ é um polinómio de grau $n - 1$. Assim, podemos demonstrar por indução, o seguinte resultado:

TEOREMA 1.22. *Qualquer polinómio de grau $n > 0$ pode se escrever na forma:*

$$p(z) = a(z - z_1) \dots (z - z_n),$$

onde $z_1, \cdots, z_n$ são raízes de $p(z)$, (não necessáriamente distintas) e $a \in \mathbb{C}^*$. Em alternativa podemos escrever

$$p(z) = a(z - w_1)^{n_1} \cdots (z - w_k)^{n_k}$$

onde $a \in \mathbb{C}^*$, $w_1, ..., w_k$ são as $k \leq n$ raizes distintas de p e $n_1 + ... + n_k = n$.

Outra propriedade importante dos polinómios é o facto de que, dados quaisquer polinómios $p(z)$ e $q(z)$, existe um polinómio (único, se insistirmos em que o coeficiente de maior grau seja igual a 1), chamado o maior divisor comum de $p(z)$ e $q(z)$, denotado por $\gcd(p, q)$ que verifica as seguintes propriedades.

PROPOSIÇÃO 1.23. *Seja $d(z) = gcd(p(z), q(z))$. Então, $d(z)$ é o único polinómio mónico (coeficiente de maior grau igual a 1) que verifica: (i) $d(z)$ divide $p(z)$ e $q(z)$; (2) Se $h(z)$ divide $p(z)$ e $q(z)$ então $h(z)$ divide $d(z)$.*

1.5. Demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra

Para provar o teorema fundamental da álgebra vamos detalhar várias propriedades simples dos polinómios que também são válidas, como veremos mais tarde, para as funções analíticas. Esta demonstração mistura propriedades globais com propriedades locais dos polinómios, servindo como motivação para muito do que se encontrará mais tarde no texto.

1.5.1. Propriedade global: Os polinómios não constantes são ilimitados. Intuitivamente, os polinómios não constantes são ilimitados, facto que se verifica igualmente para os polinómios com coeficientes reais. Mais precisamente temos:

LEMA 1.24. *Se $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ é um polinómio de grau $n > 0$, então $|p(z)| \to \infty$ quando $|z| \to \infty$.*

DEMONSTRAÇÃO. Basta usar a desigualdade triangular, e o facto de que a função $\frac{a_{n-1}}{z}+\cdots+\frac{a_1}{z^{n-1}}+\frac{a_0}{z^n}$ tende para zero quando $z\to\infty$. Em particular, existe um $R>0$ tal que $|\frac{a_{n-1}}{z}+\cdots+\frac{a_1}{z^{n-1}}+\frac{a_0}{z^n}|<\frac{|a_n|}{2}$, sempre que $|z|>R$ (note-se que $a_n\neq 0$). Assim, temos:

$$\begin{aligned}|p(z)| &= |z^n|\left|a_n+\frac{a_{n-1}}{z}+\cdots+\frac{a_1}{z^{n-1}}+\frac{a_0}{z^n}\right| \geq |z^n|\left(|a_n|-\left|\frac{a_{n-1}}{z}+\cdots+\frac{a_1}{z^{n-1}}+\frac{a_0}{z^n}\right|\right)\geq\\ &\geq |z^n|\left(|a_n|-\frac{1}{2}|a_n|\right)=\frac{1}{2}|a_n||z|^n \text{ para todo o } z \text{ tal que } |z|>R.\end{aligned}$$

Isto é suficiente para concluir o pretendido. □

Este lema pode ser reescrito numa forma análoga à do teorema de Liouvile (consulte o Teorema 2.38).

COROLÁRIO 1.25. *Se $p(z)$ é um polinómio limitado então ele é constante.*

1.5.2. Propriedades Locais: Princípios do módulo máximo e mínimo para polinómios. Os polinómios verificam também os princípios do módulo máximo e do módulo mínimo, outra propriedade que embora seja simples de demonstrar, já não é tão intuitiva, dado que não é válida para os polinómios reais.

DEFINIÇÃO 1.26. Seja Ω uma região. Dizemos que uma função $h:\Omega\to\mathbb{R}$, tem um máximo (resp. mínimo) local em $z_0\in\Omega$, se existe uma vizinhança $V\subset\Omega$ de z_0 tal que $h(z_0)\geq h(z)$ (resp. $h(z_0)\leq h(z)$) para todo $z\in V$.

PROPOSIÇÃO 1.27. *Dado um polinómio não constante p, a função $h(z):=|p(z)|$, $h:\mathbb{C}\to\mathbb{R}$ não tem máximos locais, e não tem mínimos locais em pontos z_0 onde $p(z_0)\neq 0$.*

DEMONSTRAÇÃO. Podemos supor, sem perda de generalidade, que o máximo ou mínimo local é atingido em $z_0=0$ (se $|p(z)|$ tem máximo/mínimo em z_0 então $|p(z+z_0)|$ tem máximo/mínimo em 0). Para provar o princípio do mínimo, supomos que $p(0)=a_0\neq 0$, e seja

$$p(z)=a_0+a_mz^m+\cdots+a_{n-1}z^{n-1}+a_nz^n,$$

onde a_m, $0<m\leq n$, é o primeiro coeficiente não nulo a seguir ao a_0. O caso $m=n$, sendo mais simples, é deixado ao leitor. Supondo $m<n$, dado que $a_{m+1}z+\cdots+a_nz^{n-m}$ tende para zero quando $z\to 0$, existe um certo $\varepsilon>0$ tal que $|a_{m+1}z+\cdots+a_nz^{n-m}|<|a_m|$ para todo z com $|z|<\varepsilon$. Isto equivale a ter $|a_{m+1}z^{m+1}+\cdots+a_nz^n|<|a_mz^m|$ sempre que $0<|z|<\varepsilon$. Em particular, tomando para z uma das m soluções da equação

$$\frac{a_mz^m}{a_0}=-\frac{|a_m|}{|a_0|}(\frac{\varepsilon}{2})^m<0,$$

temos $|z|=\varepsilon/2<\varepsilon$, e os complexos não nulos a_0 e a_mz^m terão direcções opostas, o que implica $|a_0+a_mz^m|=|a_0|-|a_mz^m|$. Para esta escolha de z:

$$\begin{aligned}|p(z)| &\leq |a_0+a_mz^m|+|a_{m+1}z^{m+1}+\cdots+a_nz^n|<\\ &< |a_0+a_mz^m|+|a_mz^m|=|a_0|-|a_mz^m|+|a_mz^m|\\ &=|a_0|=|p(0)|.\end{aligned}$$

Assim, em qualquer vizinhança de 0, $|p(z)|$ não atinge um mínimo, pois $|a_0|\neq 0$. O princípio do máximo prova-se de modo análogo, pelo que fica para o leitor. □

OBSERVAÇÃO 1.28. Outra forma de mostrar que não há mínimos locais (expecto de valor zero) é considerar as funções seccionais do módulo quadrado do polinómio: $\varphi(t)=|p(z_0+tv)|^2$. Estes são polinómios de grau par em $t\in\mathbb{R}$ e calcula-se facilmente que a variação de $v=e^{i\theta}$, num ponto de estacionaridade, dá máximos ou mínimos de acordo com o ângulo θ.

Como consequência destes princípios, vemos que, para qualquer polinómio não constante, a função $h(z)=|p(z)|$ não apresenta nenhum máximo em nenhuma região $\Omega\subset\mathbb{C}$, e só apresenta mínimos quando essa região contém uma ou mais raízes de $p(z)$.

COROLÁRIO 1.29. *Se $p(z)$ é um polinómio não constante, e $K\subset\mathbb{C}$ é um subconjunto compacto, então os máximos da função $h(z)=|p(z)|$ (restringida a K) encontram-se na fronteira ∂K de K; os mínimos de h encontram-se também em ∂K quando $p(z)$ não tem raízes no interior de K.*

DEMONSTRAÇÃO. Este enunciado segue do teorema de Weierstrass para funções contínuas em conjuntos compactos. Note-se que, como $z \mapsto p(z)$ é uma função contínua, também $z \mapsto |p(z)|$ define uma função $h : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ contínua, por composição com a aplicação contínua $z \mapsto |z|$. □

1.5.3. Demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra. Podemos agora provar o teorema fundamental da álgebra, que foi demonstrado por primeira vez por Gauss:

TEOREMA 1.30. *Qualquer polinómio não constante possui pelo menos uma raíz em* $\mathbb{C}$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, $a_n \neq 0$. De acordo com o Lema 1.24, seja R tal que $|p(z)| > |a_0|$, sempre que $|z| \geq R$. Assim, se por exemplo considerarmos o disco fechado $\overline{\mathbb{D}(R)}$, sabemos, pelo teorema de Weierstrass que a função *contínua* $h(z) = |p(z)| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, tem um mínimo em $\overline{\mathbb{D}(R)}$. Este mínimo não está na circunferência fronteira, porque $|p(z)| > |a_0| = p(0)$, sempre que $z \in C(R)$. Assim, o mínimo estará no interior do disco, o que pelo princípio do mínimo (Proposição 1.27), implica que existe um z_0, tal que $p(z_0) = 0$. □

1.6. Problemas

1.1 Seja $p(z)$ um polinómio de grau n.
  (a) Mostre que $\frac{p(z)}{z^{n+1}}$ tende para 0 quando z tende para ∞.
  (b) Se $n > 0$, mostre que $\frac{1}{p(z)} \to 0$ quando $z \to \infty$.

1.2 Determine os pontos de máximo e de mínimo de $|p(z)|$ em $\overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ nos casos: (a) $p(z) = z - \frac{1}{2}$; (b) $p(z) = z^3 - z$.

1.3 Seja $p(z)$ um polinómio de grau $n \geq 2$. Mostre que $p(z)$ tem n raízes distintas se e só se $p(z)$ e $p'(z)$ não têm uma raíz em comum.

1.4 Demonstre que, se $p(z)$ é um polinómio de grau n com um zero em z_0, então existe um polinómio de grau $n-1$, $q(z)$, tal que $p(z) = (z - z_0)q(z)$.

1.5 Sejam $p(z)$ e $q(z)$ dois polinómios de grau ≥ 1, cujos conjuntos de raízes R_p e R_q não se intersectam. Mostre que existem polinómios $r(z)$ e $s(z)$ tais que $r(z)p(z) + s(z)q(z) = 1$.

1.6 Verifique a propriedade do valor médio para polinómios: Sendo $p(z)$ um polinómio de grau n, e sendo $N > n$, temos:
$$p(z_0) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} p(z_j),$$
onde $z_j := z_0 + re^{\frac{2\pi i j}{N}}$. [Sugestão: Verifique esta fórmula primeiro para monómios, ie polinómios da forma $p(z) = az^n$, $a \neq 0$, e mostre que a propriedade do valor médio é aditiva].

CAPíTULO 2

Funções diferenciáveis, holomorfas e analíticas

Neste capítulo, vamos estudar o conceito de derivada de uma função complexa de variável complexa. Veremos que, apesar da definição de derivada ser inteiramente análoga à da derivada de uma função real de variável real, muitas das propriedades fundamentais das funções diferenciáveis de variável complexa não têm equivalente no caso real.

Como exemplo notável deste fenómeno, temos o teorema de Taylor, central na teoria das funções diferenciáveis de variável complexa, segundo o qual uma função que admite derivada numa vizinhança de um ponto, tem nesse ponto derivadas de todas as ordens e a correspondente série de Taylor tem raio de convergência positivo.

Deste modo, a teoria local das funções diferenciáveis é essencialmente a teoria das funções analíticas, que se resume, por sua vez, à teoria das séries de potências. Esta situação está em grande contraste com o que se passa na análise real e permite a demonstração de resultados fortes e elegantes, como o teorema de Liouville, o princípio dos zeros isolados, ou o princípio do módulo máximo, que veremos em capítulos posteriores.

Vamos aqui definir e relacionar três conceitos diferentes: diferenciabilidade, holomorfia e analiticidade. Todos eles estão ligados ao conceito de derivada de uma função f num ponto do plano complexo ou num subconjunto do plano complexo.

Como sabemos, o conceito de derivada de uma função num ponto é um conceito "local" que envolve a consideração de uma vizinhança desse ponto, sendo insensível ao comportamento da função fora dessa vizinhança. É assim natural considerar funções definidas em conjuntos abertos e conexos. Como indicámos, um conjunto aberto, conexo e não vazio será chamado região.

Em todo este livro, a legra grega maiúscula Ω designará uma região arbitrária em $\mathbb{C}$.

2.1. Funções Diferenciáveis e Funções Holomorfas

Definição de função diferenciável e de função holomorfa. Começamos por definir diferenciabilidade de forma inteiramente análoga ao caso de funções de variável real.

Definição 2.1. Uma função $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ diz-se diferenciável em $z_0 \in \Omega$ se o limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

existe em $\mathbb{C}$. Neste caso, o limite acima chama-se a derivada de f em z_0 e denota-se por $f'(z_0)$. A função f diz-se diferenciável em Ω se é diferenciável em todos os pontos $z_0 \in \Omega$.

Exemplo 2.2. Como exemplos de funções diferenciáveis numa região, temos:

- Polinómios: $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, para quaisquer $a_0, ..., a_n \in \mathbb{C}$ é uma função diferenciável em $\mathbb{C}$;
- Funções racionais: $f(z) := p(z)/q(z)$, onde p e q são polinómios sem raízes comuns, é diferenciável em $\mathbb{C} \setminus Z$, onde Z é o conjunto (finito) das raízes de $q(z)$.
- Funções trigonométricas e exponencial: Por exemplo, $\sin(z)$, $\cos(z)$, e^z são funções diferenciáveis em $\mathbb{C}$; $f(z) := \cot(z)$ é diferenciável em $\mathbb{C} \setminus \{k\pi : \ k \in \mathbb{Z}\}$.
- Funções inversas das anteriores: Por exemplo, $\arcsin(z)$ é diferenciável em $\{x + iy : \ x \in] - \pi, \pi[\}$; e $\log(z)$ é diferenciável em $\Omega = \{x + iy : \ y \in] - \pi, \pi[\}$.
- Séries de funções convergentes: qualquer série convergente num disco aberto $\mathbb{D}(z_0, r)$, com $r > 0$, é holomorfa nesse mesmo disco (isto será demonstrado mais adiante).

Observação 2.3. Uma vez que a definição de função diferenciável é inteiramente análoga à definição usada para funções de variável real, todas as usuais regras de derivação verificam-se igualmente no caso da diferenciabilidade complexa. De facto, se $f(z)$ e $g(z)$ são funções diferenciáveis (em z_0), então:

- combinação linear: sendo $a, b \in \mathbb{C}$, $(af + bg)(z) := a\,f(z) + b\,g(z)$ é diferenciável em z_0 e
$$(af + bg)'(z_0) := a\,f'(z_0) + b\,g'(z_0)$$
- produto: $(fg)(z) := f(z)g(z)$ é diferenciável em z_0, e $(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$
- quociente: Se $g(z_0) \neq 0$, temos que $(f/g)(z) := \frac{f(z)}{g(z)}$ é diferenciável em z_0, e
$$(f/g)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}.$$
- Regra da cadeia: Se h é diferenciável em $f(z_0)$ então
$$(h \circ f)'(z_0) = h'(f(z_0))\,f(z_0).$$

Esta observação serve para verificar os dois primeiros exemplos em 2.2.

Exercício 2.4. Seja $n \in \mathbb{Z}$ um número inteiro, e defina $f_n(z) := z^n$. Mostre que a derivada de f_n é dada por $f_n'(z) = n\,z^{n-1}$. Calcule a derivada de $\frac{z}{(1-z)^2}$, em todo o ponto $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

Os outros exemplos de funções diferenciáveis serão analisados com mais detalhe nos próximos capítulos.

Primeiras propriedades das funções holomorfas. Sendo Ω uma região em $\mathbb{C}$, é fácil ver que a soma e o produto de funções holomorfas são também holomorfas.

Notação. Vamos designar por $H(\Omega)$ o conjunto das funções holomorfas (ou diferenciáveis) numa região Ω.

De acordo com o que foi dito, é fácil verificar o seguinte.

Proposição 2.5. *$H(\Omega)$ é um anel comutativo com identidade.*

Este anel contem estritamente o anel dos polinómios.

2.1.1. Teorema de Gauss-Lucas. Vamos agora provar o teorema de Gauss-Lucas que relaciona, de uma forma interessante, a localização dos zeros de $p(z)$ com os zeros da sua derivada. Como sabemos os polinómios são funções inteiras e a derivada do produto de duas funções é dada pela regra usual: $(f(z)g(z))' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$. Assim, prova-se por indução que, para um polinómio de grau n escrito na forma $p\,(z) = a(z - z_1)\dots(z - z_n)$, (com os pontos z_i não necessariamente distintos) $p'(z)$ é um polinómio de grau $n - 1$ e que
$$p'(z) = a\sum_{i=1}^{n}(z - z_1)\cdots(z - z_i)'\cdots(z - z_n) = a\sum_{i=1}^{n}\prod_{j\neq i}(z - z_j) = p(z)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{z - z_i}\right)$$
Recorde-se que e $\mathbb{H} = \{z : \Im(z) > 0\}$ designam o semiplano superior formado pelos complexos com parte imaginária positiva.

Lema 2.6. *Se os zeros de $p(z)$ se encontram no fecho do semiplano superior $\overline{\mathbb{H}}$, então os zeros de $p'(z)$ também estão em $\overline{\mathbb{H}}$.*

Demonstração. Seja $p(z) = a(z - z_1)\cdots(z - z_n)$ com $z_k \in \overline{\mathbb{H}}(\mathrm{Im} z_k \geq 0)$. Temos, então: $\dfrac{p'(z)}{p(z)} = \dfrac{1}{z - z_1} + \cdots + \dfrac{1}{z - z_n}$. Se $\mathrm{Im} z < 0$ temos $\mathrm{Im}(z - z_k) = \mathrm{Im} z - \mathrm{Im} z_k < 0$, logo $\mathrm{Im}\left(\frac{1}{z-z_k}\right) > 0$ e portanto $\mathrm{Im}\left(\frac{p'(z)}{p(z)}\right) > 0$ o que implica $p'(z) \neq 0$ para todo o $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{H}}$. □

O resultado anterior tem uma interessante interpretação geométrica, que se deixa como exercício ao leitor. (Exercício **??**)

Teorema 2.7. *(Teorema de Gauss-Lucas): Os zeros de $p'(z)$ estão no menor polígono convexo e fechado que contém os zeros de $p(z)$.*

Exercício 2.8. Prove que um polinómio não constante define uma função aberta [Recorde que uma função $f : X \to Y$ diz-se aberta (entre espaços topológicos X e Y) se $f(U) \subset Y$ é aberto para qualquer U aberto em X].

2.2. Séries de Potências

De modo a definir o conceito de analiticidade, de modo análogo ao caso real, vamos primeiro introduzir a teoria básica das séries de potências.

Séries de potências formais e convergentes. Começamos por definir série de potências (não negativas), que podem considerar-se como "polinómios de grau infinito".

DEFINIÇÃO 2.9. Uma série de potências (não negativas)[1] centrada em $z_0 \in \mathbb{C}$ é qualquer expressão da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + ...$$

onde a_n são números complexos, chamados os coeficientes da série. Convém distinguir dois casos fundamentalmente distintos de séries de potências: o das séries formais, em que a série apenas converge no seu centro z_0 (não podendo por isso definir uma função numa região), e o das séries convergentes, em que a série converge para algum $z \in \mathbb{C}$ distinto do centro.

Pretendemos agora provar que qualquer série de potências convergente define uma *função diferenciável num certo disco*, o chamado disco de convergência. Comecemos por provar a continuidade das funções definidas por séries.

Raio e disco de convergência. O teorema de Abel.

DEFINIÇÃO 2.10. O raio de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ é o número

$$R = \sup\{r \in \mathbb{R} : \ |a_n|r^n \text{ é uma sucessão limitada}\} \in [0, \infty]$$

e o disco de convergência é $\mathbb{D}(z_0; R)$.

OBSERVAÇÃO 2.11. Note-se que $R = 0$ se e só se a série dada é apenas formal (converge somente em z_0). As definições de raio e disco de convergência são motivadas pelo seguinte resultado. Desta forma, a expressão *série convergente* vai referir-se sempre a séries cujo raio de convergência é positivo.

TEOREMA 2.12. *(Teorema de Abel sobre convergência de séries) Seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ uma série convergente com disco de convergência $\mathbb{D}(z_0, R)$ e seja $K \subset \mathbb{D}(z_0; R)$ um subconjunto compacto. Então, a série é* uniformemente convergente em *K e* diverge para *$|z-z_0| > R$.*

DEMONSTRAÇÃO. Uma vez que $R > 0$, podemos escolher reais s e r, com $0 < s < r < R$ de tal forma que $|a_n|r^n$ é uma sucessão limitada, e que $K \subset \overline{\mathbb{D}(z_0, s)}$ (qualquer compacto está a uma distância não nula da fronteira $C(z_0, r)$ do disco de convergência). Assim, existe $M > 0$ que verifica $|a_n|r^n \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Temos então que, para n fixo,

$$\max_{z \in \overline{\mathbb{D}(z_0,s)}} \{|a_n(z-z_0)^n|\} \leq |a_n|s^n \leq M(\frac{s}{r})^n.$$

Podemos agora aplicar o *teste-M* de Weierstrass, uma vez que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ é uma série de funções majorada uniformemente pela série convergente,

$$M \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{s}{r}\right)^n = M \frac{1}{1-\frac{s}{r}} < \infty,$$

para conlcuir que a série é uniformemente convergente no disco compacto $\overline{\mathbb{D}(z_0, s)}$ e, portanto, também em K. A segunda parte é deixada para o leitor. □

Uma vez que o limite uniforme de funções contínuas é contínua, podemos concluir o seguinte.

COROLÁRIO 2.13. *Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ é uma série convergente e definirmos $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, em $\mathbb{D}(z_0, R)$, então $f(z)$ é uma função contínua neste disco de convergência.*

OBSERVAÇÃO 2.14. Note-se que se $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ converge em $\mathbb{D}(z_0, R)$ então $f(z + z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge em $\mathbb{D}(0, R)$ e vice-versa. De facto, a fórmula para o raio de convergência *não depende de z_0*. Da mesma forma, as propriedades de continuidade ou diferenciabilidade não são afectadas pela mudança de $z \mapsto z + z_0$ pelo que frequentemente, em demonstrações, podemos assumir, sem perda de generalidade, que z_0 – o centro da série – é a origem.

[1] A expressão "não negativas", lembra que o índice n toma valores em $\mathbb{N}_0$, e é normalmente omitida. Adiante, veremos séries de potências onde $n \in \mathbb{Z}$, chamadas séries de Laurent.

Determinação do raio de convergência. Dada uma série de potências, convém dispor de fórmulas de cálculo para o seu raio de convergência.

PROPOSIÇÃO 2.15. *(Fórmula de Cauchy-Hadamard) O raio de convergência da série pode ser calculado através de:*

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$$

$$\liminf \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \leq R \leq \limsup \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

DEMONSTRAÇÃO. Ver Lang ... □

EXEMPLO 2.16. (a) A série $\sum n!z^n$ tem raio de convergência nulo, pelo que é uma série formal e por isso, não representa nunhuma função: só está definida quando $z = 0$, onde vale 0.

(b) A série $\sum \frac{z^n}{n!}$ tem raio de convergência $+\infty$ pelo que define uma função em todo o plano complexo. Esta função é, como sabemos, a função exponencial.

(c) Série geométrica $\displaystyle\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + ...,$ converge para $|z| < 1$.

(d) $\displaystyle\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - ...,$ converge em $\mathbb{C}$.

Naturalmente, a soma e subtracção de séries convergentes é convergente. Outra forma de obter séries convergentes é efectuando produtos.

EXERCÍCIO 2.17. Sejam $f(z) = \sum_n a_n z^n$ e $g(z) = \sum_m b_m z^m$ com raios de convergência ρ_1 e ρ_2. Mostre que se verifica o desenvolvimento:

$$f(z)g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k,$$

onde $c_k = \sum_{n=0}^{k} a_n b_{k-n}$, e que esta série converge em $\mathbb{D}(0, \rho)$ com $\rho = \min\{\rho_1, \rho_2\}$.

Diferenciabilidade das séries de potências. Além de representarem funções contínuas, as séries de potências convergentes representam sempre funções difereciáveis no respectivo disco de convergência. Além disso, veremos adiante que estas séries são infinitamente diferenciáveis, no disco de convergência, e que são até analíticas. Para já, fazemos uma simples observação.

PROPOSIÇÃO 2.18. *Se a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ tem raio de convergência $R > 0$, então a sua derivada formal (derivada termo a termo):*

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (z - z_0)^n,$$

é uma série convergente com o mesmo disco de convergência (e portanto, raio de convergência R). Da mesma forma, a derivada formal de ordem $k \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+k) \cdots (n+1) a_{n+k} (z - z_0)^n,$$

tem raio de convergência R.

DEMONSTRAÇÃO. Façamos o caso da primeira derivada formal, que se pode escrever como

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n,$$

onde $b_n := (n+1)a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sendo r o seu raio de convergência temos

$$\frac{1}{r} = \limsup_{n\to\infty} |b_n|^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to\infty} (n+1)^{\frac{1}{n}} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{R},$$

devido ao facto de $\lim_{n\to\infty}(n+1)^{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to 0}(1 + \frac{1}{x})^x = 1$. Concluimos que $r = R$. O caso da derivada de ordem geral $k \in \mathbb{N}$ segue-se por iteração. □

Isto leva-nos ao seguinte enunciado.

Teorema 2.19. *Uma série de potências convergente define uma função de classe C^∞ no seu disco de convergência. Mais precisamente, sendo $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n(z-z_0)^n$ em $\mathbb{D}(z_0, R)$ $(R > 0)$ então:*

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^\infty (n+k)\cdots(n+1)a_{n+k}(z-z_0)^n,$$

é uma série válida em $\mathbb{D}(z_0, R)$. Em particular, as derivadas no centro são dadas por:

$$f^{(k)}(z_0) = a_k\, k!, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Vamos mostrar a existência e a fórmula para a primeira derivada em qualquer ponto do disco. Podemos supor que $z_0 = 0$, de acordo com o comentário 2.14. Fixemos $w \in \mathbb{D}(0, R)$ e $r > 0$ tal que $|w| < r < R$. Definimos os polinómios

$$q_n(z) := w^{n-1} + w^{n-2}\, z + \cdots + w\, z^{n-2} + z^{n-1} = \frac{z^n - w^n}{z - w},$$

para $n \in \mathbb{N}$. Note-se que $q_n(w) = nw^{n-1}$ e que $|q_n(z)| \le n\, r^{n-1}$ para qualquer $z \in \overline{\mathbb{D}(0, r)}$. Podemos escrever

$$\frac{f(z) - f(w)}{z - w} = \frac{\sum_{n=0}^\infty a_n(z^n - w^n)}{(z-w)} = \sum_{n=0}^\infty a_n q_n(z). \tag{2.2.1}$$

Por definição, $f'(w)$ existe se esta última série representar uma função contínua no ponto w. Isto segue, pelo teste M de Weierstrass, da convergência da série:

$$\sum_{n=0}^\infty |a_n q_n(z)|_{\overline{\mathbb{D}(0,r)}} \le \sum |a_n|\, n\, r^{n-1} < \infty,$$

sendo que a série da direita converge pela Proposição 2.18. Finalmente, a fórmula para $f'(w)$ segue-se substituindo $q_n(w) = nw^{n-1}$ em (2.2.1). □

Corolário 2.20. *O desenvolvimento em série de uma função holomorfa, num dado disco, é único. Mais precisamente, se $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n\,(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^\infty b_n\,(z-z_0)^n$, no disco $\mathbb{D}(z_0, R)$, $R > 0$, então $a_n = b_n$ para todo o $n \in \mathbb{N}_0$.*

Demonstração. Sendo $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n\,(z-z_0)^n$, f é infinitamente diferenciável em z_0 e $f^{(k)}(z_0) = a_k\, k!$, pelo Teorema 2.19. De igual forma, o segundo desenvolvimento implica $f^{(k)}(z_0) = b_k\, k!$. □

Estes resultados sugerem a seguinte definição.

Definição 2.21. Se $f(z)$ é uma função infinitamente diferenciável em z_0 a sua série de Taylor em z_0 é a seguinte série:

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\,(z-z_0)^n\,.$$

Podemos resumir esta subsecção da seguinte forma:

Teorema 2.22. *Uma série de potências define uma função diferenciável $f(z)$ no respectivo disco de convergência. Nesse caso, a série dada coincide com a série de Taylor de $f(z)$.*

A pergunta natural é se, reciprocamente, dada uma função diferenciável num disco, ela se pode representar como uma série convergente nesse disco. Isto é o tema da próxima subsecção.

Propriedades das séries de potências. As séries de potências convergentes no disco $\mathbb{D}(z_0, R)$ formam um anel. De facto, a adição usual está bem definida, e se multiplicarmos duas séries convergentes obtemos uma terceira (ver o exercício ...).

2.3. Diferenciabilidade real e complexa: as equações de Cauchy-Riemann

Em primeiro lugar, devemos recordar as noções de função diferenciável, holomorfa e analítica. Para avançar, estudaremos agora a relação entre diferenciabilidade complexa e a diferencibilidade em $\mathbb{R}^2$.

EXERCÍCIO 2.23. Mostre que, se $f(z)$ é diferenciável em z_0, então é contínua em z_0.

Anteriormente já usámos a identificação natural entre o plano complexo $\mathbb{C}$ e o plano real $\mathbb{R}^2$. Segundo esta, a cada função de variável complexa $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ pode associar-se a função $f_{\mathbb{R}^2} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por:

$$f_{\mathbb{R}^2}(x, y) := (u(x, y), v(x, y)), \quad \text{onde} \quad \begin{cases} u(x, y) = \Re\left(f(x + iy)\right) \\ v(x, y) = \Im\left(f(x + iy)\right). \end{cases}$$

Aqui, u e v são funções reais, chamadas naturalmente, a parte real e imaginária (respectivamente) de f. Graficamente, podemos representar da seguinte forma a relação entre f e $f_{\mathbb{R}^2}$:

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} \\ \| & & \| \\ \Omega & \xrightarrow{f_{\mathbb{R}^2}} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

É natural questionar-se sobre a relação entre a diferenciabilidade de f (segundo a definição 2.1) e a diferenciabilidade de $f_{\mathbb{R}^2}$, como função de duas variáveis reais.

OBSERVAÇÃO 2.24. Recorde-se que, uma vez que a topologia em $\mathbb{C}$ é a mesma que em $\mathbb{R}^2$, as noções de continuidade coincidem nestes dois contextos: funções complexas e funções com variável em $\mathbb{R}^2$.

Como sabemos, a derivada de $f_{\mathbb{R}^2}$ no ponto $(x_0, y_0) \in \Omega$ é representada pela matriz:

$$Df_{\mathbb{R}^2}(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \Big|_{(x_0, y_0)} \tag{2.3.1}$$

que nos fornece uma aplicação linear do espaço vectorial $\mathbb{R}^2$ nele próprio. Esta aplicação linear depende de 4 números reais, em contraste com os 2 números reais que compõem a derivada $f'(z_0)$. A "resolução" deste diferendo está em que devemos considerar apenas as matrizes 2×2 que correspondem a aplicações $\mathbb{C}$-lineares de $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ em si mesmo.

LEMA 2.25. *Usando a identificação natural entre vectores de $\mathbb{R}^2$ e números complexos (dada por $(u, v) \mapsto u + iv$), as matrizes 2×2 que representam transformações $\mathbb{C}$-lineares de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ são da forma:*

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Qualquer transformação $\mathbb{C}$-linear entre $\mathbb{C}$ e $\mathbb{C}$ é da forma $z \mapsto \lambda z$, para um certo $\lambda \in \mathbb{C}$. Sendo $z = x + iy$, $\lambda = a + bi$, temos $\lambda z = ax - by + i(bx + ay)$. Assim, uma aplicação entre $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^2$ é $\mathbb{C}$-linear se e só se transforma o vector (x, y) no vector $(ax - by, bx + ay)$ para certos números reais a, b, transformação esta que é precisamente representada pela matriz acima. □

DEFINIÇÃO 2.26. $f : \Omega \to \mathbb{C}$ diz-se holomorfa em $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$ se $f_{\mathbb{R}^2}$ é de classe C^1 em (x_0, y_0) e $Df_{\mathbb{R}^2}(x_0, y_0)$ é uma transformação $\mathbb{C}$-linear. f diz-se holomorfa em Ω, se f é holomorfa em todos os pontos $z \in \Omega$.

Por outras palavras, escrevendo $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, f é holomorfa em z_0 se $f_{\mathbb{R}^2}$ é de classe C^1 em (x_0, y_0) e a transformação linear dada pela matrix (2.3.1) é $\mathbb{C}$-linear, ou seja, as funções u, v verificam

$$(*) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

no ponto (x_0,y_0). Estas famosas equações chamam-se as equações de Cauchy-Riemann.

Outra forma de definir holomorfia é através de operadores diferenciais lineares adequados. Consideremos as combinações lineares de derivadas parciais definidas por:

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

É fácil verificar que as equações de Cauchy-Riemann (no ponto (x_0, y_0)) podem escrever-se como uma singela equação:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right|_{(x_0,y_0)} = 0,$$

onde $f = u + iv$. Além disso, temos que

$$\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{(x_0,y_0)} = f'(z_0),$$

se f é diferenciável em $z_0 = x_0 + iy_0$. Deixamos estas verificações para o leitor.

Equivalência entre diferenciabilidade e holomorfia. A noção de holomorfia coincide com a de diferenciabilidade. De facto, f é holomorfa num ponto se e só se é diferenciável nesse ponto.

PROPOSIÇÃO 2.27. *Seja Ω é uma região em $\mathbb{C}$ e $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ com u e v de classe C^1 em Ω, e $z_0 \in \Omega$. Então, f é diferenciável em z_0 se e só se f é holomorfa em z_0. Uma fórmula para a derivada em z_0 em termos de u e v é:*

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Se f é diferenciável em z_0, então podemos calcular o limite $f'(z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$ nas direcções horizontal e vertical e comparar o resultado. Na direcção horizontal, fazemos $h = s \in \mathbb{R}$ e assim:

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{s\to 0} \frac{f(x_0+iy_0+s) - f(x_0+iy_0)}{s} = \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{u(x_0+s,y_0) - u(x_0,y_0) + iv(x_0+s,y_0) - iv(x_0,y_0)}{s} = \\ &= \left[\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right]_{(x_0,y_0)}. \end{aligned}$$

Fazendo o mesmo limite na direcção vertical $h = it$, $(t \in \mathbb{R})$ obtemos $f'(z_0) = \left[\frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right]_{(x_0,y_0)}$; como, por hipótese, o limite é único obtemos as equações de Cauchy-Riemann.

Para provar o recíproco, usamos as fórmulas de Taylor usuais para funções de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$. Sendo f é holomorfa em $z_0 = x_0 + iy_0$ e $h = s + it$, temos:

$$\begin{aligned} f(z_0+h) - f(z_0) =& u(z_0+h) - u(z_0) + i\left[v(z_0+h) - v(z_0)\right] = \\ &= \bigtriangledown u(x_0,y_0)\cdot(s,t) + o(\|(s,t)\|) + i[\bigtriangledown v(x_0,y_0)\cdot(s,t)] + o(\|(s,t)\|) = \\ =& \frac{\partial u}{\partial x}s - \frac{\partial v}{\partial x}t + i\frac{\partial v}{\partial x}s + i\frac{\partial u}{\partial x}t + o(\|(s,t)\|) = \\ =& \left(\frac{\partial u}{\partial u} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(s+it) + o(\|(s,t)\|). \end{aligned}$$

onde as derivadas parciais são calculadas em (x_0, y_0) e $o(\|(s,t)\|)$ designa um termo que tende para zero quando $\|(s,t)\| \to 0$. Asim, o limite:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\cdot h + o(|h|)}{h} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

existe, o que prova que f é diferenciável em z_0, e nos dá a fórmula pretendida. □

2.4. Funções Analíticas e o Teorema de Taylor

Numa secção anterior mostrámos que as séries de potências convergentes definem funções infinitamente diferenciáveis. Agora vamos mostrar algo ainda mais forte: são analíticas no disco de convergência.

DEFINIÇÃO 2.28. Diz-se que $f : \Omega \to \mathbb{C}$ é *analítica em* $z_0 \in \Omega$, se f coincide com uma série de potências convergente num disco centrado em z_0. Por outras palavras, se existe $r > 0$ e uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, com raio de convergência $r > 0$, tal que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ para todo $z \in \mathbb{D}(z_0, r)$. Diz-se que f *é analítica em* Ω se é analítica em todos os pontos de Ω.

É fácil ver que a soma, combinações lineares, e produtos de funções analíticas, são analíticas também.

Como exemplos de funções analíticas em $\mathbb{C}$ temos os polinómios e as funções trigonométricas seno, cosseno e exponencial. Se $q(z)$ não se anula num aberto U, é também fácil de provar que as funções racionais da forma $\frac{p(z)}{q(z)}$ são analíticas em U. Mais geralmente, veremos de seguida que as séries convergentes são analíticas.

Para já, mostramos que qualquer função analítica coincide com a sua série de Taylor no disco de convergência.

PROPOSIÇÃO 2.29. *Se f é analítica em $\mathbb{D}(z_0, r)$, $r > 0$, então f coincide com a sua série de Taylor, e o raio de convergência desta série é maior ou igual a r.*

DEMONSTRAÇÃO. Observe-se que no decorrer da demonstração da Proposição 2.18 provou-se que a derivada da série $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ se pode escrever como $f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(z - z_0)^{n-1}$, série que tem o mesmo raio de convergência que $f(z)$. Note-se ainda que $f(z_0) = a_0$, $f'(z_0) = a_1$ e derivando mais uma vez $f''(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1)(z - z_0)^{n-2}$ logo $f''(z_0) = 2a_2$. Continuando desta forma obtemos a seguinte proposição cuja demonstração é deixada ao leitor. □

Note-se que este resultado é falso para funções reais de variável real que são apenas de classe C^∞.

EXEMPLO 2.30. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

É fácil de verificar que f é infinitamente diferenciável em $\mathbb{R}$, e que no ponto $x = 0$, todas as derivadas de f se anulam. Assim, a sua série de Taylor é zero. Portanto, f não coincide com a sua série de Taylor em nenhuma vizinhança da origem. Esta "patologia" pode entender-se, do ponto de vista da análise complexa, verificando simplesmente que a função $f(z) = e^{-\frac{1}{z^2}}$ não é holomorfa em $z = 0$ (mais precisamente, não se pode extender de forma a ser holomorfa em $z = 0$).

EXERCÍCIO 2.31. A função $f(z) = |z|^2$ não é analítica em nenhum ponto de $\mathbb{C}$, embora seja diferenciável em $z = 0$. Isto é uma contradição? Justifique.

Para resumir os resultados desta subsecção, utilizamos as seguintes notações. Seja $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ e $D = \mathbb{D}(z_0, r)$. Denotemos por $\mathcal{S}(D)$ o conjunto das séries de potências convergentes em D e por $\mathcal{A}(D)$ o conjunto das funções analíticas em D. Assim, nesta secção provámos que

$$\mathcal{A}(D) \subset \mathcal{S}(D') \subset H(D'),$$

onde D' é um disco contido em D e possivelmente menor que D. De seguida mostraremos que, de facto, estes 3 conjuntos coincidem, e que temos sempre $D' = D$. Iremos igualmente provar que, com o produto usual de séries, estas igualdades tornam-se isomorfismos de anéis.

Poderíamos mostrar também que $\mathcal{S}(D) \subset \mathcal{A}(D)$, para todo o disco D.

TEOREMA 2.32. *Se $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ tem disco de convergência $\mathbb{D}(z_0, r)$, com $r > 0$, então f é analítica em todo o disco $\mathbb{D}(z_0, r)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Naturalmente, f é analítica em z_0, por definição. A ideia é modificar a série dada para determinar o desenvolvimento em série em torno de qualquer outro ponto $z_1 \in \mathbb{D}(z_0, r)$. Como o teorema de Taylor implicará este enunciado, não detalhamos esta prova. Em lugar disso, encorajamos o leitor a fazê-lo, como aplicação das técnicas usadas até aqui. □

Na secção 2.2 mostrámos que as séries convergentes definem funções holomorfas no disco de convergência. De acordo com a secção anterior, podemos então dizer que as funções analíticas são holomorfas. Nesta secção vamos mostrar que, reciprocamente, qualquer função holomorfa é analítica, o que significa que pode ser representada por uma série convergente que é precisamente a sua série de Taylor.

Embora seja uma propriedade de diferenciabilidade, este forte resultado, que não tem correspondência para funções reais, só admite demonstrações que envolvem cálculo integral. Faremos aqui uma demonstração que envolve apenas integrais ao longo de circunferências em $\mathbb{C}$ e que se baseia na propriedade do valor médio para as funções holomorfas.

2.4.1. A propriedade do valor médio. Um polinómio verifica a propriedade do valor médio (ver o exercício ...). Mais geralmente, esta é uma propriedade que qualquer função holomorfa satisfaz, se considerarmos que estamos a deixar o número de pontos ir para infinito.

Como sabemos, média dos valores da função $f(z)$, calculados nos pontos num polígono regular em redor de um dado ponto z_0 é a expressão:

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} f(z_j),$$

onde $z_j = z_0 + re^{\frac{\pi i j}{N}}$, $j = 1, \cdots, N$. Fazendo o limite quando N tende para infinito, deveríamos obter:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})dt.$$

A prova do Teorema de Taylor envolve estes integrais, fáceis de parametrizar, pelo que apenas teremos que usar resultados elementares da teoria do integral de Riemann em intervalos compactos de $\mathbb{R}$.

Comecemos por verificar que, de facto, as funções analíticas verificam a propriedade do valor médio.

Proposição 2.33. *Seja $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, válida no disco $\mathbb{D}(z_0, R)$. Então:*

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z - z_0}dz = a_0 = f(z_0),$$

para todo o $r \in]0, R[$.

Demonstração. Como este é um integral de Riemann, de uma função contínua num intervalo compacto, e a série converge uniformemente, podemos trocar a série com o integral e obter:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z - z_0}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=r} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^{n-1}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=r} a_0(z - z_0)^{-1}dz = a_0,$$

uma vez que $\oint_{|z-z_0|=r}(z - z_0)^m dz = 0$ para qualquer $m \geq 0$. □

A demonstração do Teorema de Taylor pode dividir-se em duas partes: qualquer função holomorfa verifica a propriedade do valor médio, e qualquer função que verifique a propriedade do valor médio é analítica.

2.4.2. Analiticidade das funções holomorfas.

Teorema 2.34. *Se $f : \Omega \to \mathbb{C}$ é holomorfa em Ω, então f verifica a propriedade do valor médio em Ω.*

Demonstração. Seja f diferenciável em $z_0 \in \Omega$. Para provar que f é analítica em z_0 podemos supor novamente que $z_0 = 0 \in \Omega$. Seja $r \in]0, R[$, onde $R > 0$ é tal que o disco $\mathbb{D}(0, R)$ está contido em Ω. Vamos definir, para $z \in \mathbb{D}(0, r)$ fixo, a função $g : [0, 1] \to \mathbb{C}$ através da expressão seguinte.

$$g(s) = \int_0^{2\pi} \frac{f\left((1 - s)z + sre^{it}\right) - f(z)}{re^{it} - z} re^{it}dt.$$

A função integranda é diferenciável em s e $t \in [0, 2\pi]$, por hipótese. Logo g é uma função diferenciável em $[0, 1]$ e, para $s \neq 0$:

$$g'(s) = \int_0^{2\pi} f'\left((1 - s)z + \lambda re^{it}\right) re^{it}dt = \int_0^{2\pi} F_s'(t)dt = F_s(2\pi) - F_s(0) = 0,$$

onde $F_s(t) = \frac{1}{si}f\left((1 - s)z + sre^{it}\right)$ para $s \neq 0$ (aqui usa-se o facto de que f é diferenciável, através da regra da cadeia). Como $g(0) = 0$, e $g'(s) = 0$ para $s \neq 0$, conclui-se que $g(s) \equiv 0$ no intervalo $s \in [0, 1]$. Assim $g(1) = 0$ o que implica:

$$\int_0^{2\pi} f(re^{it})\frac{re^{it}}{re^{it} - z}dt = f(z)\int_0^{2\pi} \frac{re^{it}}{re^{it} - z}dt. \tag{2.4.1}$$

O quociente em ambos os membros pode-se desenvolver em série geométrica

$$\frac{re^{it}}{re^{it}-z}=\frac{1}{1-\frac{z}{re^{it}}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(re^{it})^n},$$

válida porque $|z|<r$. No lado direito, o integral não depende da função $f(z)$, e temos:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{re^{it}}{re^{it}-z}dt &= \int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(re^{it})^n}dt\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}z^n\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(re^{it})^n}=2\pi f(z).\end{aligned}$$

Assim, a equação 2.4.1 dá-nos a propriedade do valor médio:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(w)}{w-z}dw=f(z).$$

□

2.4.3. O teorema de Taylor. Os resultados anteriores podem assim ser resumidos no seguinte enunciado, o célebre Teorema de Taylor. Note-se que sendo Ω um aberto em $\mathbb{C}$, o seu complemento é um fechado $C:=\mathbb{C}\setminus\Omega$. Assim, se C é não vazio, a distância de um ponto $z_0\in\Omega$ a C tem um mínimo global (sendo a distância uma função contínua num compacto não vazio da forma $\overline{\mathbb{D}(z_0,R)}\cap C$). Essa distância define o maior disco aberto $\mathbb{D}(z_0,R)$ contido em Ω.

Teorema 2.35. *[Taylor] Seja f diferenciável numa região Ω, $z_0\in\Omega$ e seja $\mathbb{D}(z_0,R)$ o maior disco aberto contido em Ω. Então f é analítica em $\mathbb{D}(z_0,R)$. Alem disso, $f(z)$ coincide com a sua série de Taylor, em $\mathbb{D}(z_0,R)$,*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n.$$

Em particular, o raio de convergência desta série é R. Temos também a seguinte representação integral das derivadas de f:

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(re^{it}+z_0)}{(re^{it})^n}dt,\qquad (\text{ com } n\geq 0 \text{ e } r\in]0,R[).$$

Demonstração. O teorema anterior garante a propriedade do valor médio. Assim, temos:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^{2\pi}\frac{f(re^{it})}{(re^{it})^n}dt\right)z^n &= \int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}f(re^{it})\frac{z^n}{(re^{it})^n}dt=\int_0^{2\pi}f(re^{it})\frac{re^{it}}{re^{it}-z}dt=\\ &= f(z)\int_0^{2\pi}\frac{re^{it}}{re^{it}-z}dt=f(z)\int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(re^{it})^n}dt=\\ &= f(z)\sum_{n=0}^{\infty}z^n\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(re^{it})^n}=2\pi f(z).\end{aligned}$$

Aqui, a troca do integral com o somatório é justificada pelo facto de f ser limitada em $[0,2\pi]$ e todas as funções $f(re^{it})(re^{it})^{-n}$ serem integráveis neste intervalo. Como o últmo integral é nulo para $n>0$ e é igual a 2π se $n=0$, a última série reduz-se ao primeiro termo: $f(z)2\pi$. Concluimos, portanto que f é analítica pois para $z\in\mathbb{D}(0,r)$:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n\qquad\text{em que}\qquad a_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(re^{it})}{(re^{it})^n}dt.$$

□

Note-se que este resultado não tem análogo no caso de funções diferenciáveis de uma variável real. Estes 2 últimos teoremas completam as identificações prometidas, isto é, temos:

$$\mathcal{S}(D)=\mathcal{A}(D)=H(D),$$

para qualquer disco $D=\mathbb{D}(z_0,r)$.

2.4.4. Fórmulas de Cauchy. As fórmulas para as derivadas podem escrever-se na forma

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

Em particular, para $n = 0$ obtemos:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it} + z_0)dt = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z} dz$$

o que mostra que o valor de uma função holomorfa depende somente dos seus valores numa circunferência $z_0 + re^{it}$ contida na sua região de holomorfia.

2.4.5. Desigualdades de Cauchy.

COROLÁRIO 2.36. *Se $f \in H(\Omega)$ e $\mathbb{D}(z_0, R) \subset \Omega$, então*

$$\left| f^{(n)}(z_0) \right| \leq \frac{n!}{R^n} \, M_R$$

onde $M_R = \max_{t \in [0,2\pi]} \left| f(z_0 + Re^{it}) \right|$.

DEMONSTRAÇÃO. O resultado segue da estimativa:

$$\begin{aligned} \left| f^{(n)}(z_0) \right| = \frac{n!}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{it} + z_0)}{(Re^{it})^n} dt \right| &\leq \frac{n!}{2\pi R^n} \int_0^{2\pi} \left| f(Re^{it} + z_0) \right| dt \\ &\leq \frac{n!}{2\pi R^n} 2\pi M_R = \frac{n!}{R^n} M_R. \end{aligned}$$

□

Finalizamos esta subsecção com uma consequência importante do Teorema de Taylor, que manifesta clara diferença em relação à análise real.

2.4.6. O teorema de Liouville. A primeira é o teorema de Liouville, sem dúvida um resultado que contraria a intuição adquirida com funções de variável real.

DEFINIÇÃO 2.37. Uma função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ diz-se inteira se é holomorfa em todo $\mathbb{C}$, isto é, se $f \in H(\mathbb{C})$.

TEOREMA 2.38. ***(Liouville)****: Uma função inteira e limitada é constante.*

DEMONSTRAÇÃO. Por hipótese $f \in H(\mathbb{C})$ e $|f| \leq M$. Pelas desigualdades de Cauchy, temos $\left| f^{(n)}(0) \right| \leq \frac{n!}{R^n} M$, mas $f \in H(\mathbb{D}(0, R))$ para todo $R > 0$. Logo podemos fazer R tão grande quanto quisermos o que implica $f^{(n)}(0) = 0 \; \forall n \geq 1$. Como $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$,$\forall z \in \mathbb{C}$, concluimos que $f(z) = f(0)$, $\forall z \in \mathbb{C}$. □

Em conclusão, neste capítulo definimos funções diferenciáveis, holomorfas e analíticas, e mostrámos que estas noções são equivalentes em qualquer região do plano complexo. Em particular, podemos ver os elementos do anel $H(\Omega)$ como funções ou como séries, de acordo com as necessidades. Vimos também alguns exemplos de funções diferenciáveis (nalguma região) e relacionámos raio de convergência com domínio de diferenciabilidade.

2.5. Problemas

2.1 Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa tal que $\Im f(z) = 4$. Mostre que f é constante. Se o domínio de f fôr $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, a mesma conclusão é válida? Justifique.

2.2 (a) Determine uma função f, analítica em $\mathbb{C}$, tal que

$$\Re f(x + iy) = e^{2x} \cos 2y + x^2 - y^2 + 1$$

(b) Determine $f'(\frac{\pi i}{2})$.

2.2 Calcule $\displaystyle\oint_\Gamma \frac{\cos z}{z + 3i} \, dz$, onde $\Gamma(t) = 1 + e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

2.3 Seja $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{x + 0i : x \leq 0\}$. Calcule o integral

$$\int_\gamma \log z \ dz$$

onde γ é um caminho em Ω com início em 1 e fim em i.

CAPíTULO 3

Funções Meromorfas e a Esfera de Riemann

Neste capítulo, vamos definir e estudar as funções meromorfas. Esta é uma classe de funções muito importante, e consiste nas funções numa dada região Ω que são holomorfas em todos os pontos de Ω à excepção de um conjunto discreto de singularidades, que são todas pólos.

Um exemplo fundamental de funções meromorfas consiste nas funções racionais, que são quocientes de funções polinomiais. Assim, começaremos pelo estudo dos polinómios e de algumas das suas propriedades algébricas.

3.1. Séries de Laurent e Singularidades Isoladas

Tal como as funções polinomiais se generalizam para séries de potências, as funções racionais têm uma generalização: as séries de Laurent.

Definição de série de Laurent. Como vimos, uma série de potências convergente está naturalmente associada a um disco, o seu disco de convergência. Mais geralmente, a uma série de Laurent convergente podemos naturalmente associadar um anel, como veremos.

Definição 3.1. Seja $z_0 \in \mathbb{C}$ e $r_1 < r_2 \in [0, \infty]$. Um anel centrado em z_0 e de raios r_1 e r_2 é o conjunto

$$\mathbb{A}(z_0; r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}.$$

Como casos particulares temos $\mathbb{A}(z_0; 0, r)$, que é um disco perfurado, também denotado por $\mathbb{D}^*(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\}$ e $\mathbb{A}(0, 0, \infty) = \mathbb{C}^*$.

Definição 3.2. Uma série de Laurent centrada em z_0 é uma série da forma:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}.$$

Assim, uma série de Laurent é a soma da sua parte regular $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ com a sua parte principal $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$. Como anteriormente, convém distinguir o caso das séries de Laurent formais, em que a região de convergência é no máximo um ponto, do caso contrário, que serão chamadas séries de Laurent convergentes.

Convergência das séries de Laurent.

Teorema 3.3. *Seja $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ uma série de Laurent convergente. Então, existem $r_1 < r_2 \in [0, +\infty]$ tais que a série é uniformemente convergente em $\mathbb{A}(z_0; r_1, r_2)$ e diverge em $\mathbb{C} \backslash \overline{\mathbb{A}(z_0; r_1, r_2)}$. Além disso, esta série define uma função diferenciável no anel $\mathbb{A}(z_0; r_1, r_2)$.*

Demonstração. De acordo com o Teorema 2.12, a parte regular $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ converge num certo disco $\mathbb{D}(z_0, r_2)$ com $r_2 \in]0, +\infty]$. Por outro lado, a parte principal $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$ é uma série de potências positivas na variável $w = \frac{1}{z - z_0}$. Logo, converge quando $w \in \mathbb{D}(0, \frac{1}{r_1})$ para certo $r_1 \in]0, +\infty]$, ou seja, para $|w| < \frac{1}{r_1}$ que equivale a $|z - z_0| > r_1$, o complemento de um disco fechado no plano z. Uma vez que a soma das duas partes converge para algum valor de z, temos que $r_2 > r_1$. Assim, a série dada converge na intersecção das duas regiões, isto é, para $r_1 < |z - z_0| < r_2$. A demonstração que a série define uma função diferenciável é análoga ao caso analítico. $\square$

Tal como no caso das séries de potências não negativas, o recíproco também se verifica.

TEOREMA 3.4. *Dada uma função $f(z)$ diferenciável num anel $\mathbb{A}(z_0; r_1, r_2)$, existe uma série de Laurent centrada em z_0, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$, tal que*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n, \quad \textit{em } \mathbb{A}(z_0; r_1, r_2).$$

Alem disso, temos:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz,$$

para qualquer $r \in [r_1, r_2]$.

Singularidades isoladas. As séries de Laurent mais importantes são as definidas em discos perfurados. Isto motiva a definição de singularidades isoladas.

DEFINIÇÃO 3.5. Seja f uma função diferenciável num disco perfurado $\mathbb{D}^*(z_0, r)$ centrado em z_0. Então diz-se que f tem uma singularidade isolada em z_0 ou que z_0 é uma singularidade isolada de f.

Classificação das singularidades isoladas. O teorema das singularidades de Riemann é o passo essencial para a classificação de singularidades.

3.1.1. O teorema da remoção das singularidades de Riemann.

TEOREMA 3.6. *Seja Ω uma região, $z_0 \in \Omega$ uma singularidade isolada de $f(z)$. Se f é holomorfa e limitada em $\Omega \setminus \{z_0\}$ então f pode ser extendida a uma função holomorfa em toda a região Ω.*

DEMONSTRAÇÃO. Podemos assumir que $z_0 = 0 \in \Omega$ e escrevemos $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ de acordo com o Teorema de representação em série de Laurent, num certo disco D. Como $f(z)$ é limitada em D a função $g(z) = zf(z)$ tem limite igual a zero quando $z \to 0$. Assim, g é contínua em todo Ω. Isto significa que a função $h(z) = z^2 f(z) = zg(z)$ é holomorfa em Ω porque, sendo naturalmente holomorfa em $\Omega \setminus \{z_0\}$ temos que $h'(0) = \lim_{z\to 0} \frac{zg(z)-0}{z} = \lim_{z\to 0} g(z) = 0$. Uma vez que $h(0) = h'(0) = 0$, podemos escrever

$$h(z) = z^2 f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^{n+2} = a_0 z^2 + a_1 z^3 + \cdots,$$

sendo esta uma uma série convergente em D. Ou seja, os a_n com índice negativo anulam-se e $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$ em D, o que implica que f é holomorfa também em $z = 0$. □

Se uma função $f(z)$ é holomorfa num disco perfurado $\mathbb{D}^*(z_0, r)$, podemos escrever a sua série de Laurent na seguinte forma:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n},$$

onde $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$ é a sua parte principal.

DEFINIÇÃO 3.7. A singularidade z_0 é chamada:

- Removível se a parte principal é 0,
- Pólo de ordem m, se a parte principal é $\sum_{n=1}^{m} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$, com $b_m \neq 0$,
- Essencial, se a parte principal não é uma série finita, ou seja, se para qualquer $N > 0$ existe $m > N$ com $b_m \neq 0$.

Note-se que a definição de singularidade removível é consistente com o teorema das singularidades removíveis de Riemann.

Os pólos e as singularidades essenciais têm comportamentos fundamentalmente distintos. Mais precisamente, consideremos $f \in H(\mathbb{D}^*(z_0, r))$ e a seguinte função auxiliar, para $n \geq 0$ inteiro, $\varphi_n(z) = (z-z_0)^n f(z)$. Assim, temos o seguinte resultado de classificação:

TEOREMA 3.8. *Seja f diferenciável num disco perfurado $\mathbb{D}^*(z_0, r)$, e $\varphi_n(z)$ a família de funções definidas acima, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Então, temos:*

(1) z_0 é uma singularidade removível se e só se $\lim_{z\to z_0} \varphi_0(z)$ existe,
(2) z_0 é um pólo de ordem n se e só se $\lim_{z\to z_0} \varphi_n(z)$ existe e é não nulo,
(3) z_0 é uma singularidade essencial se e só se $\lim_{z\to z_0} \varphi_n(z)$ não existe para nenhum $n \in \mathbb{N}$.

DEMONSTRAÇÃO. ... □

3.2. Funções Meromorfas

Seja Ω uma região de $\mathbb{C}$, isto é, um subconjunto aberto, conexo e não vazio de $\mathbb{C}$.

DEFINIÇÃO 3.9. Uma função f diz-se meromorfa em Ω se f é holomorfa em Ω à excepção de singularidades isoladas que são todas pólos ou singularidades removíveis de f. Mais precisamente, f é meromorfa em Ω se existe um subconjunto *discreto* de Ω, denotado por P_f e chamado o conjunto de pólos de f, e tal que $f \in H(\Omega \setminus P_f)$ e $z \in P_f$ se e só se z é um pólo de f. Usamos a notação $M(\Omega)$ para indicar o conjunto das funções meromorfas na região Ω.

Recorde que S é um subconjunto discreto de Ω se para cada ponto $z_0 \in S$, existe um disco centrado em z_0, $D = \mathbb{D}(z_0, r)$ suficientemente pequeno, de tal forma que $S \cap D = \{z_0\}$, ou seja $S \cap \mathbb{D}^*(z_0, r)$ é vazio.

OBSERVAÇÃO 3.10. (1) Todas as singularidades de uma função meromorfa são isoladas, uma vez que os pólos são singularidades isoladas.
(2) É evidente que se f é holomorfa em Ω então é holomorfa em $\Omega \setminus S$ para qualquer subconjunto discreto $S \subset \Omega$. Mas neste caso, as singularidades em S são todas removíveis. Assim, consideramos sempre que P_f consiste sempre em pólos (e ignoramos as singularidades removíveis) porque assumimos que extendemos f de forma a estar definida em todas as singularidades removíveis.
(3) Se f é meromorfa num conjunto compacto K, isto é, $f \in M(\Omega)$ para certa região Ω que contém K, então P_f é um conjunto finito. Isto decorre do facto que um subconjunto discreto de um conjunto compacto é finito.

EXEMPLO 3.11. (1) Qualquer função holomorfa em Ω é meromorfa em Ω (Aqui P_f é o conjunto vazio).

(2) Para qualquer $z_0 \in \mathbb{C}$, a função dada por $f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^n}$, para $n \in \mathbb{N}$, é holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. Uma vez que z_0 é um pólo de ordem n, temos que $f(z)$ é meromorfa em $\mathbb{C}$, isto é $f \in M(\mathbb{C})$.

(3) Se $f(z) = \frac{1}{p(z)}$ onde $p(z)$ é um polinómio não identicamente nulo é meromorfa em $\mathbb{C}$, e holomorfa se e só se $p(z)$ é não constante. Aqui P_f coincide com o conjunto das raízes de $p(z)$.

3.2.1. O corpo das funções meromorfas. O conjunto das funções meromorfas numa região Ω denota-se por $M(\Omega)$. Pelo exemplo (1) acima, temos $H(\Omega) \subset M(\Omega)$.

Anteriormente, vimos que $H(\Omega)$ é um anel, com a operações usuais de soma e produto de funções. Também em $M(\Omega)$ podemos somar, subtrair e multiplicar funções. Além disso, dadas duas funções meromorfas $f, g \in M(\Omega)$, sendo $g(z)$ não indenticamente nula, o quociente $f(z)/g(z)$ é uma função meromorfa em Ω.

PROPOSIÇÃO 3.12. *Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ uma região. $M(\Omega)$ é um corpo que contém o anel $H(\Omega)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Basta ver o caso do quociente f/g, com $f, g \in M(\Omega)$ e com $g \neq 0$. Neste caso, basta verificar que, quando f e g são representados por séries de Laurent, válida num certo disco perfurado, então podemos escrever $f(z)/g(z)$ também como série de Laurent, válida num certo disco perfurado, eventualmente menor que o inicial, mas certamente não vazio. □

3.2.2. Definição de ordem de um ponto.

DEFINIÇÃO 3.13. Seja f uma função meromorfa (não identicamente nula) em Ω e $z_0 \in \Omega$. A ordem de f em z_0, que se denota por $\mathrm{ord}_{z_0}(f)$, é o índice do primeiro termo não nulo da expansão em série de Laurent num disco perfurado em torno de z_0. Mais precisamente se $f(z) = \sum_{k \geq m} a_k (z - z_0)^k$ é a expansão referida, onde $a_m \neq 0$, então $\mathrm{ord}_{z_0}(f) := m \in \mathbb{Z}$.

PROPOSIÇÃO 3.14. *Seja $f \in M(\Omega)$, $z_0 \in \Omega$ e $k = \mathrm{ord}_{z_0} f$. Temos:*
(1) $k > 0$ se e só se f é holomorfa em z_0 e $f(z_0) = 0$
(2) $k = 0$ se e só se f é holomorfa em z_0 e $f(z_0) \neq 0$
(3) $k < 0$ se e só se z_0 é pólo de f de ordem $-k$.

DEMONSTRAÇÃO. Exercício. □

PROPOSIÇÃO 3.15. *Sejam $f, g \in M(\Omega)$ e $z_0 \in \Omega$. Então:*
(1) $\mathrm{ord}_{z_0}(fg) = \mathrm{ord}_{z_0}(f) + \mathrm{ord}_{z_0}(f)$
(2) $\mathrm{ord}_{z_0}(f \pm g) \geq \min\{\mathrm{ord}_{z_0}(f), \mathrm{ord}_{z_0}(g)\}$
(3) Se g não é a função nula, então $\frac{1}{g} \in M(\Omega)$ e $\mathrm{ord}_{z_0}(\frac{f}{g}) = \mathrm{ord}_{z_0}(f) - \mathrm{ord}_{z_0}(f)$

DEMONSTRAÇÃO. (1) e (2) Exercícios. O (3) convém mostrar... □

3.3. Funções Racionais

3.3.1. Definição de função racional. Vamos agora considerar as funções mais simples a seguir aos polinómios.

DEFINIÇÃO 3.16. Uma função racional é o quociente de dois polinómios em que o denominador não é o polinómio identicamente nulo. Assim, uma função racional é da forma

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

onde q tem grau ≥ 0 [1]. Note-se que f não define unicamente p e q, pois podemos multiplicar p e q pelo mesmo polinómio não nulo, obtendo a mesma função racional. Assim, sem perda de generalidade, e salvo expressa menção em contrário, *assumiremos sempre que f é uma fracção irredutível, ou seja, p e q não contém raizes em comum.*

Uma vez que o conjunto dos zeros de $q(z)$ é finito, este forma um subconjunto discreto de $\mathbb{C}$. Desta forma, temos.

PROPOSIÇÃO 3.17. *Uma função racional é uma função meromorfa em todo o plano complexo.*

DEMONSTRAÇÃO. De facto, as singularidades de $f(z) = p(z)/q(z)$ são as raizes de q, um conjunto finito, e qualquer uma delas é um pólo de f, como facilmente se verifica. □

3.3.2. Polinómios e funções racionais. Naturalmente os polinómios, sendo funções inteiras, são casos muito particulares de funções racionais. Reciprocamente, é igualmente fácil de verificar que uma função racional $f(z) = p(z)/q(z)$ escrita na forma irredutível, é holomorfa se e só se $q(z)$ é constante, ou seja se e só se é um polinómio.

LEMA 3.18. *Uma função racional é holomorfa em $\mathbb{C}$ (ie, não tem singularidades) se e só se é um polinómio.*

DEMONSTRAÇÃO. Exercício. □

3.3.3. Definição de Função racional própria e simples.

DEFINIÇÃO 3.19. Uma função racional própria é uma função racional $p(z)/q(z)$ em que $\delta p < \delta q$. Uma função racional simples é uma função racional própria da forma $p(z)/(z-z_0)^k$, para certos $z_0 \in \mathbb{C}$ e $k \in \mathbb{N}$ ($\delta p < k$), ou seja, uma função racional própria que é holomorfa em $\mathbb{C}$ excepto num único ponto. Por vezes, usam-se também as expressões *fracção própria* e *fracção simples*, respectivamente.

LEMA 3.20. *(1) Se $f(z)$ é uma fracção própria, então $|f(z)| \to 0$ quando $|z| \to +\infty$.*
(2) Se $f_1(z)$ e $f_2(z)$ são fracções próprias, então $f_1(z)f_2(z)$ e $f_1(z) \pm f_2(z)$ também são fracções próprias.

DEMONSTRAÇÃO. Exercício. □

3.3.4. Decomposição das funções racionais. As funções racionais podem decompor-se usando o algoritmo de divisão dos polinómios.

PROPOSIÇÃO 3.21. *Qualquer função racional se pode escrever como a soma de um polinómio e de uma função racional própria.*

DEMONSTRAÇÃO. Algoritmo de divisão de polinómios. □

3.3.5. Decomposição das funções racionais próprias. Um resultado muito importante, que permite a simplificação de muitos problemas que envolvem funções racionais é o da decomposição em fracções simples.

PROPOSIÇÃO 3.22. *Seja $f(z) = \frac{q(z)}{p(z)}$ uma função racional própria e seja $p(z) = (z-z_1)^{k_1} \cdots (z-z_l)^{k_l}$ a decomposição do denominador em factores (sem perda de generalidade). Então podemos escrever $f(z)$ como soma de funções racionais simples*

$$f(z) = \frac{q_1(z)}{(z-z_1)^{k_1}} + \cdots + \frac{q_l(z)}{(z-z_l)^{k_l}}.$$

[1] Como mencionado antes, convenciona-se que o polinómio nulo tem grau -1.

Assim, para cada $j = 1, ..., l$ o grau de q_j é estritamente inferior a k_j. Em particular, $\frac{q_j(z)}{(z-z_j)^{k_j}}$ é a parte principal de $f(z)$ num disco perfurado em torno de z_j.

Demonstração. Há duas demonstrações que vale a pena apresentar: uma é puramente algébrica e outra usa a análise complexa. Primeiro, vejamos a demonstração algébrica para o caso de $p(z)$ com duas raízes distintas. O caso geral é análogo. Assim, seja $p(z) = (z - z_1)^{k_1}(z - z_2)^{k_2}$, $\deg p = k_1 + k_2$, em que z_1 e z_2 são pontos distintos de $\mathbb{C}$ e $q(z)$ um polinómio de grau $< \deg p$. Como $z_1 \neq z_2$, os polinómios $(z - z_1)^{k_1}$ e $(z - z_2)^{k_2}$ têm gcd igual a 1, pelo que, aplicando a identidade de Bézout (ver Apêndice) existem polinómios $q_1(z)$ e $q_2(z)$ tais que

$$q_1(z)(z - z_2)^{k_2} + q_2(z)(z - z_1)^{k_1} = q(z). \tag{3.3.1}$$

Uma vez que $q(z)$ não tem raízes em comum com $p(z)$, z_j não é raíz de $q_j(z)$, $j = 1, 2$. Dividindo por $p(z)$ obtemos uma soma de fracções irredutíveis:

$$\frac{q(z)}{p(z)} = \frac{q_1(z)}{(z - z_1)^{k_1}} + \frac{q_2(z)}{(z - z_2)^{k_2}}. \tag{3.3.2}$$

Note-se, no entanto, que os polinómios $q_1(z)$ e $q_2(z)$ que satisfazem a Equação (3.3.1) não são únicos, podendo-se efectuar as substituições seguintes, para qualquer polinómio $r(z)$:

$$\begin{array}{rcl} q_1(z) & \mapsto & q_1(z) + r(z)(z - z_1)^{k_1} \\ q_2(z) & \mapsto & q_2(z) - r(z)(z - z_2)^{k_2} \end{array}$$

Desta forma, tomando o resto da divisão de q_1 por $(z - z_1)^{k_1}$, podemos assumir que temos uma solução da Equação (3.3.1) com $\deg q_1 < k_1$. Finalmente, como $\deg q < \deg p$, temos na Equação (3.3.2) duas fracções próprias, pelo que a terceira também o é (ver o Lemma 3.20(2)).

Façamos agora a demonstração analítica, que identifica imediatamente cada termo com a parte principal correspondente. Uma vez que nenhum das raízes $z_1, ..., z_l$ de $p(z)$ é raíz de $q(z)$, vemos que $\operatorname{ord}_{z_j} f = -k_j$, pelo que podemos escrever a parte principal de $f(z)$ em torno de z_j como $\frac{q_j(z)}{(z-z_j)^{k_j}}$. Seja

$$h(z) = f(z) - \frac{q_1(z)}{(z - z_1)^{k_j}} - \cdots - \frac{q_l(z)}{(z - z_l)^{k_l}}.$$

É fácil de ver que $h(z)$ é holomorfa em todos os pontos (nos pontos z_j tem singularidades removíveis) pelo que é inteira. Por outro lado, $h(z)$ é uma fracção própria, pois é soma de fracções próprias. Mas uma fracção própria que é holomorfa tem que ser zero, como se verifica facilmente. $\square$

Exemplo 3.23. Represente em frações simples

$$\frac{z^2}{(z^2 + 4)(z - 3)}$$

O seguinte enunciado resume o essencial dos resultados nesta secção.

Teorema 3.24. *Qualquer função racional própria $q(z)/p(z)$ se pode escrever como a soma de fracções simples. Cada uma destas fracções simples é a parte principal do desenvolvimento em série de Laurent em torno de uma das raízes de $p(z)$.*

3.4. A esfera de Riemann

Há uma interpretação geométrica do conceito de função meromorfa que torna esta definição mais natural. Para isso, introduzimos a esfera de Riemann.

3.4.1. A esfera de Riemann.

Definição 3.25. A esfera de Riemann é o conjunto $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ com a topologia em que uma base para as vizinhanças de ∞ são os complementos de $\overline{\mathbb{D}(0, R)}$. Usando a notação $\mathbb{D}(\infty, r) = \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}(0, \frac{1}{r})}$, podemos então dizer, como habitualmente, que $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ é aberto se e só se para todo o ponto $z_0 \in \Omega$ existe $R > 0$ tal que $\mathbb{D}(z_0, R) \subset \Omega$.

Observação 3.26. Com esta definição, a noção de continuidade pode explicar-se da seguinte forma. Uma função $f : \Omega \to \mathbb{C}_\infty$ é contínua em z_0 se f é contínua no aberto $\Omega \setminus f^{-1}(\infty)$ e se $\lim_{z \to z_0} |f(z_0)| = \infty$ sempre que $f(z_0) = \infty$.

3.4.2. Equivalência entre funções meromorfas e funções com valores na esfera de Riemann.

PROPOSIÇÃO 3.27. *Uma função meromorfa f em Ω define uma função contínua $\Omega \to \mathbb{C}_\infty$, ao atribuirmos $f(z) := \infty$ para todo $z \in P_f$. Reciprocamente, uma função contínua $f : \Omega \to \mathbb{C}_\infty$ com $f \in H(\Omega \setminus f^{-1}(\infty))$ e $f^{-1}(\infty)$ discreto em Ω, define uma função meromorfa em Ω, com $P_f = f^{-1}(\infty)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Exercício. □

3.4.3. Funções meromorfas no infinito. Como vimos, as funções racionais são meromorfas em $\mathbb{C}$. Uma vez que as fracções próprias tendem para 0 no infinito, é natural extender o domínio deste tipo de funções para conter o ponto do infinito na esfera de Riemann.

DEFINIÇÃO 3.28. Seja f holomorfa numa região do tipo $\{z \in \mathbb{C} : \ |z| > R\}$. Diz-se que f tem uma singularidade removível, um pólo de ordem k ou uma singularidade essencial em ∞ se a função $g(z) := f(\frac{1}{z})$ tem uma singularidade removível, um pólo de ordem k ou uma singularidade essencial, respectivamente, em 0.

Desta forma, podemos extender a noção de função meromorfa a este tipo de funções.

DEFINIÇÃO 3.29. Uma função f diz-se meromorfa no infinito se a função $g(z) := f(1/z)$ é meromorfa no ponto $z = 0$. Analogamente, a ordem de f no infinito define-se como $\mathrm{ord}_\infty f = \mathrm{ord}_0 g$. Uma função f diz-se meromorfa na esfera de Riemann se é meromorfa em $\mathbb{C}$ e é meromorfa também no ponto $\infty \in \mathbb{C}_\infty$.

Podemos ver que as funções racionais, sendo funções meromorfas em $\mathbb{C}$, podem considerar-se, de forma natural, como aplicações da esfera de Riemann em si mesma.

LEMA 3.30. *Uma função racional é meromorfa em $\mathbb{C}_\infty$.*

DEMONSTRAÇÃO. Exercício (use a Proposição 3.27). □

3.4.4. Funções meromorfas na esfera de Riemann. Vamos agora classificar as funções meromorfas em $\mathbb{C}_\infty$. Para isso, o seguinte resultado topológico é fundamental.

LEMA 3.31. *A esfera de Riemann é um conjunto compacto.*

DEMONSTRAÇÃO. Exercício. □

A compacidade da esfera de Riemann permite mostrar o recíproco do Lema 3.30.

PROPOSIÇÃO 3.32. *Qualquer função meromorfa em $\mathbb{C}_\infty$ é uma função racional.*

DEMONSTRAÇÃO. Exercício. □

3.4.5. Projecção estereográfica. A esfera de Riemann pode ser obtida de três formas distintas, todas elas relevantes. Anteriormente, definimos a esfera de Riemann como $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ dando uma topologia a este conjunto.

Podemos caracterizá-la como a esfera usual em $\mathbb{R}^3$, à qual demos uma noção de estrutura complexa.

LEMA 3.33. *A aplicação $\phi : S^2 \to \mathbb{C}_\infty$ é um homeomorfismo.*

3.4.6. A recta projectiva. Podemos também caracterizar a esfera de Riemann como o espaço dos subespaços vectoriais de dimensão 1 em $\mathbb{C}^2$, ou seja, como a “recta projectiva complexa”.

LEMA 3.34. *A aplicação $\eta : \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{C}_\infty$ é um homeomorfismo (biholomorfismo).*

3.5. Transformações de Möbius

As transformações de Möbius são também chamadas transformações fraccionais lineares, pois são representadas por funções racionais que são quocientes de polinómios do primeiro grau.

3.5.1. Definição de transformação de Möbius.

DEFINIÇÃO 3.35. Uma transformação de Möbius é uma função racional da forma $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ com $ad - bc \neq 0$.

OBSERVAÇÃO 3.36. A condição $ad - bc \neq 0$ é equivalente à condição de que pelo menos um dos polinómios $az + b$ e $cz + d$ é não constante, e que estes dois polinómios não têm raizes em comum.

Como é imediato, uma transformação de Möbius é uma função holomorfa em todo o plano complexo, à excepção do ponto $z_0 = -\frac{d}{c}$ (e é inteira precisamente quando $c = 0$).

OBSERVAÇÃO 3.37. Da mesma forma que para funções racionais mais gerais, extendemos a função $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ a uma aplicação $T : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$, que denotamos com a mesma letra, não havendo perigo de confusão.

De acordo com esta convenção, temos $T(-\frac{d}{c}) = \infty$ e $T(\infty) = \frac{a}{c}$. Além disso, de forma não ambígua, quando $c = 0$, temos $\frac{d}{c} = \frac{a}{c} = \infty$.

A seguinte propriedade mostra que podemos inverter $T(z)$ obtendo outra transformação de Möbius. Recorde-se que uma função $f : U \to V$ é bijectiva se f é injectiva e sobrejectiva, e que estas condições equivalem à existência da chamada função inversa $f^{-1} : V \to U$ que verifica: $f^{-1}(f(x)) = x$ para qualquer $x \in X$.

PROPOSIÇÃO 3.38. *Uma transformação de Möbius é uma aplicação bijectiva e contínua da esfera de Riemann nela própria.*

DEMONSTRAÇÃO. A fórmula para a transformação inversa é fácilmente obtida através de

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \iff z = \frac{1}{ad - bc}\frac{dzw - b}{-cw + a}.$$

Para a bijectividade, resta provar que isto é ainda uma função de $\mathbb{C}_\infty$ para si próprio, o que se deixa ao leitor. A contínuidade em $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ é clara. Neste ponto e em ∞, o resultado segue dada a topologia que colocámos em $\mathbb{C}_\infty$. □

Como vimos, a fórmula da transformação inversa é bastante simples no caso em que $ad - bc = 1$. Assim, quando escrevemos $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ com $ad - bc = 1$, dizemos que T está escrita na forma normalizada. Multiplicando numerador e denominador pelo mesmo coeficiente apropriado, vemos que qualquer transformação de Möbius se pode escrever na forma normalizada.

PROPOSIÇÃO 3.39. *Uma transformação de Möbius é uma aplicação holomorfa de $\mathbb{C}_\infty$ em $\mathbb{C}_\infty$.*

DEMONSTRAÇÃO. Uma vez mais, para pontos de $\mathbb{C}\setminus\{-\frac{d}{c}\}$ o resultado segue da fórmula da derivada:

$$T'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} \neq 0.$$

Nos restantes pontos é também fácil verificar, mediante definição apropriada de aplicação conforme (ver o exercício). □

Denotamos o conjunto das aplicações de Möbius por Mob e vamos agora caracterizá-lo.

3.5.2. O grupo das transformações de Möbius. Seja $GL(2, \mathbb{C})$ o grupo das matrizes 2×2 invertíveis de entradas complexas, e $SL(2, \mathbb{C})$ o subgrupo das matrizes invertíveis que têm determinante igual a 1. Seja

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C}),$$

e seja T_A a transformação de Möbius dada por $T_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Se $I \in GL(2, \mathbb{C})$ é a matriz identidade, é fácil de ver que $T_I(z) = z$ para todo o $z \in \mathbb{C}_\infty$ (a transformação identidade).

Recorde-se que, se G é um grupo e $H \subset G$ um subgrupo normal, então G/H é também um grupo, de forma natural.

Denotamos por $PSL(2, \mathbb{C})$ (ou $PGL(2, \mathbb{C})$) o grupo quociente de $SL(2, \mathbb{C})$ pelo seu centro $\{\pm I\}$.

TEOREMA 3.40. *O conjunto das transformações de Möbius forma um grupo, isomorfo a $PSL(2, \mathbb{C})$.*

Demonstração. Consideremos a aplicação τ definida em $SL(2,\mathbb{C})$, por $\tau(A) := \tau_A$, para $A \in SL(2,\mathbb{C})$. Podemos provar que $\tau : SL(2,\mathbb{C}) \to Mob$ é sobrejectiva, que é um homomorfismo de grupos e que o seu núcleo é

$$\ker(\tau) = \pm I$$

onde I é a matriz identidade. Assim, pelo teorema do isomorfismo em grupos, temos que $Mob = SL(2,\mathbb{C})/\pm I$ grupo este que é, por definição $PSL(2,\mathbb{C})$. □

3.5.3. Acção de Mob na esfera de Riemann. Este grupo actua na esfera de Riemann, $\mathbb{C}_\infty$ de forma natural. Podemos ver que esta acção preserva a união das rectas com as circunferências do plano.

Definição 3.41. Uma circunferência de $\mathbb{C}_\infty$ é uma circunferência em $\mathbb{C}$ ou uma recta em $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$.

Assim, uma circunferência de $\mathbb{C}_\infty$ é um conjunto compacto, sendo um conjunto fechado em $\mathbb{C}_\infty$.

Proposição 3.42. *A imagem de uma circunferência de $\mathbb{C}_\infty$ por uma transformação de Möbius é novamente uma circunferência de $\mathbb{C}_\infty$.*

Demonstração. Basta provar que qq transformação de Möbius é a composição de transformações de 3 tipos: translacções, dilatações e inversão. Todas estas preservam circunferências de $\mathbb{C}_\infty$.

Supor $c = 0$. Então $T(z) = \frac{az+b}{d}$. Supor $c \neq 0$. Então, $T(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\frac{a}{c}z+\frac{b}{c}}{z+\frac{d}{c}} = \frac{\beta}{z+\frac{d}{c}} + \alpha$, pela decomposição em fracções simples (de facto, $\alpha = \frac{a}{c}$ e $\beta = \frac{bc-ad}{c^2} \neq 0$). □

3.5.4. Pontos fixos. Qualquer transformação de Möbius não trivial tem apenas 1 ou 2 pontos fixos.

Teorema 3.43. *Seja $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ uma tranformação de Möbius distinta da identidade, escrita na forma normalizada. Então T tem um ponto fixo, caso $a + d = \pm 2$, ou dois pontos fixos, no caso contrário.*

Demonstração. Segue directamente da resolução da equação quadrática $\frac{az+b}{cz+d} = z$, pela fórmula resolvente. □

3.5.5. Tripla transitividade. Este resultado permite mostrar que a acção de Mob em $\mathbb{C}_\infty$ é transitiva, e além disso, uma transformação de Möbius é completamente determinada pela acção em triplos de pontos distintos.

Proposição 3.44. *Dados três pontos distintos da esfera de Riemann, z_1, z_2, z_3, existe uma única transformação de Möbius que envia z_1 em ∞, z_2 em 0 e z_3 em 1.*

Demonstração. Essa transformação de Möbius é dada por $T(z) = \frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}\frac{z_2-z}{z_1-z} = [z_1, z_2; z_3, z] = [z_3 \; \substack{z_1 \\ z_2} \; z]$. Para ver que só há uma transformação que fixa ∞, 0 e 1, usa-se o facto de que 3 pontos determinam T. □

Teorema 3.45. *A acção de Mob em $\mathbb{C}_\infty$ é 3-transitiva; isto é, dados dois triplos (z_1, z_2, z_3) e (w_1, w_2, w_3) de pontos distintos ($z_i \neq z_j$ e $w_i \neq w_j$, sempre que $i \neq j \in \{1, 2, 3\}$) existe uma única transformação de Möbius $M(z)$ tal que $M(z_1) = w_1$, $M(z_2) = w_2$ e $M(z_3) = w_3$.*

Demonstração. É imediato da Proposição. □

3.5.6. A razão cruzada.

Definição 3.46. A razão cruzada dos complexos z_1, z_2, z_3, z_4 é o número $[z_1, z_2; z_3, z_4] = \frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}\frac{z_2-z_4}{z_1-z_4}$. É fácil de ver que a razão cruzada está bem definida sempre que z_1, z_2 e z_3 são pontos distintos em $\mathbb{C}_\infty$ (mas z_4 pode ser igual a um desses três pontos).

Proposição 3.47. *A razão cruzada é invariante pelas tranformações de Möbius.*

Demonstração. Façamos a demonstração para $T(z) = az + b \in Mob$. Assim,

$$[T(z_1), T(z_2); T(z_3), T(z_4)] = \frac{T(z_1) - T(z_3)}{T(z_2) - T(z_3)}\frac{T(z_2) - T(z_4)}{T(z_1) - T(z_4)} = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}\frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4} = [z_1, z_2; z_3, z_4].$$

Para $J(z) = 1/z$, temos

$$[J(z_1), J(z_2); J(z_3), J(z_4)] = \frac{\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_3}}{\frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_3}} \frac{\frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_4}}{\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_4}} = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_1} = [z_1, z_2; z_3, z_4].$$

Como qualquer transformação de Möbius é composição destas, o resultado segue. □

3.5.7. Subgrupos de Mob. Existem vários subgrupos de Mob muito importantes em problemas práticos.

O mais evidente é o grupo das transformações euclideanas no plano.

LEMA 3.48. *As transformações de Möbius que preservam apenas o ∞ são da forma $T(z) = az + b$ com $a \neq 0$. As transformações que preservam 0 e ∞ são da forma $T(z) = \lambda z$ com $\lambda \neq 0$.*

DEMONSTRAÇÃO. Fácil. □

Temos também o subgroupo das transformações de Möbius reais.

PROPOSIÇÃO 3.49. *As transformações de Möbius que preservam o "equador da esfera de Riemann", isto é $\mathbb{R}_\infty := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, são da forma $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ com a, b, c, d reais (e claro, $ad - bc \neq 0$).*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ uma transformação de Möbius com coeficientes a, b, c, d reais. Então $f(x) \in \mathbb{R}_\infty$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$, e $f(\infty) = \frac{a}{c} \in \mathbb{R}_\infty$, donde f preserva $\mathbb{R}_\infty$. Reciprocamente, se f preserva $\mathbb{R}_\infty$, também f^{-1} preserva $\mathbb{R}_\infty$ (pela bijectividade), pelo que existem $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}_\infty$ distintos tais que $f(x_1) = \infty$, $f(x_2) = 0$, $f(x_3) = 1$. Assim, usando a razão cruzada, f tem coeficientes reais. □

Os subgrupos das transformações unitárias, definidas e indefinidas, também são importantes.

PROPOSIÇÃO 3.50. *Temos os subgrupos $PU(2)$ e $PSU(1,1)$.*

3.6. Problemas

3.1 Sejam $p(z)$ e $q(z)$ polinómios.
   (a) Assumindo $\deg p < \deg q$, prove que o limite $\frac{p(z)}{q(z)}$, quando z tende para ∞, existe e é 0.
   (b) Mostre que $\deg(pq) = \deg(p) + \deg(q)$ e que $\deg(p \pm q) \leq \max\{\deg p, \deg q\}$.

3.2 Determine os pontos de máximo e de mínimo de $|p(z)|$ em $\overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ nos casos: (a) $p(z) = z - \frac{1}{2}$; (b) $p(z) = z^3 - z$.

3.3 Seja $p(z)$ um polinómio de grau $n \geq 2$ e $z_0 \in \mathbb{C}$.
   (a) Mostre que $p(z)$ tem n raízes distintas se e só se $p(z)$ e $p'(z)$ não têm uma raíz em comum.
   (b) Defina $I_{z_0} = \{q(z) \in \mathbb{C}[z] : \ q(z)$ tem uma raíz em $z_0\}$. Prove que I_{z_0} é um ideal maximal do anel $\mathbb{C}[z]$.

3.4 [Teorema de Lucas] Dado um polinómio $p(z)$, demonstre que os zeros de $p'(z)$ estão contidos no menor polígono convexo e fechado que contém os zeros de $p(z)$.

3.5 Mostre que, se $p(z)$ é um polinómio cujos zeros são todos reais, então o mesmo se passa com a sua derivada $p'(z)$. Prove que se os zeros de $p(z)$ têm módulo menor que 1, o mesmo se passa com $p'(z)$.

3.6 Sejam $p(z)$ e $q(z)$ dois polinómios de grau ≥ 1, cujos conjuntos de raízes R_p e R_q não se intersectam. Mostre que existem polinómios $r(z)$ e $s(z)$ tais que $r(z)p(z) + s(z)q(z) = 1$.

3.7 Sejam $z_1, ..., z_n$ pontos da esfera de Riemann e $m_1, ..., m_n$ números inteiros cuja soma é zero. Mostre que existe uma função racional $f(z)$ cujos zeros ou polos estão no conjunto $\{z_1, ..., z_n\}$ e tal que a ordem de $f(z)$ em z_j é precisamente m_j. É possível existir uma tal função se a soma dos m_j não for nula?

3.8 Mostre que a esfera de Riemann é um espaço topológico compacto. Prove que qualquer função meromorfa em $\mathbb{C}_\infty$ é uma função racional.

3.9 Se $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ é uma transformação de Möbius diferente da identidade, mostre que $T \circ T(z) = z$, para todo z, se e só se $a + d = 0$.

3.10 Uma função meromorfa $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_\infty)$ diz-se holomorfa no ponto $\infty \in \mathbb{C}_\infty$ se $\mathrm{ord}_\infty f = \mathrm{ord}_0 h \geq 0$ onde $h(w) := f(\frac{1}{w})$; neste caso, a sua derivada em ∞ é definida por $f'(\infty) = h'(0)$. Mostre que uma transformação de Möbius $T(z)$ é holomorfa no ∞ se e só se $T(\infty) \neq \infty$, e neste caso, verifique que $T'(\infty) \neq 0$.

3.11 Seja T uma transformação de Möbius com um único ponto fixo $\alpha \in \mathbb{C}$. Mostre que existe $\beta \in \mathbb{C}$, tal que $\frac{1}{T(z)-\alpha} = \frac{1}{z-\alpha} + \beta$. Prove que T é conjugada[2] a uma translação da forma $S(z) = z + 1$.

3.12 Prove que se T é uma transformação de Möbius com dois pontos fixos $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, então existe $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, tal que $\frac{T(z)-\alpha}{T(z)-\beta} = \lambda \frac{z-\alpha}{z-\beta}$. Prove também que T é conjugada a uma função da forma $S(z) = az$. $(a \in \mathbb{C}^*)$.

3.13 Considere a transformação de Möbius T, tal que $T(0) = 2$, $T(1) = 1$, $T(-1) = \frac{5}{3}$. Quantos pontos fixos tem T em $\mathbb{C}_\infty$? Determine $T(C)$ onde C é a circunferência unitária $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

3.14 Mostre que $[z_1, z_2; z_3, z_4]$ é um número real se e só se os pontos z_1, z_2, z_3 e z_4 se encontram numa circunferência de $\mathbb{C}_\infty$.

3.15 Mostre que as transformações que preservam o semi-plano superior $\mathbb{H}$ são da forma $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $ad - bc > 0$.

3.16 Seja $T(z) = \dfrac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha} z}$ uma transformação de Möbius, com $\alpha \in \mathbb{C}$. Quais os valores que α não pode tomar? Mostre que T preserva a circunferência unitária $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ e que, para $|\alpha| < 1$, $T(\mathbb{D}) = \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

---

[2]Recorde que duas transformações de Möbius S e T dizem-se conjugadas se existir uma transformação de Möbius F tal que $S = F^{-1} \circ T \circ F$.

CAPíTULO 4

Teoria Local das Funções Holomorfas e Meromorfas

Vamos agora demonstrar vários resultados importantes, que constituem as propriedades locais fundamentais das funções holomorfas ou diferenciáveis.

4.1. O Teorema da Função Inversa e Isomorfismos Locais

Em primeiro lugar, devemos recordar as noções de função diferenciável, holomorfa e analítica. Recorde-se, em particular as equações de Cauchy-Riemann (ver secção ...)

4.1.1. Isomorfismos locais. Vamos também introduzir a noção de invertibilidade local de funções. Recorde-se que uma função $f : U \to V$ é bijectiva se f é injectiva (dois pontos distintos não podem ter a mesma imagem) e sobrejectiva ($f(U) = V$). Quando $f : U \to V$ é bijeciva podemos definir a função inversa $f^{-1} : V \to U$.

Definição 4.1. Diz-se que $f \in H(\Omega)$ é um isomorfismo (analítico) local em $z_0 \in \Omega$ se existem vizinhanças $U \subset \Omega$ de z_0 e V de $w_0 := f(z_0)$ tal que $f|_U : U \to V$ é bijectiva e a função inversa $(f|_U)^{-1} : V \to U$ é também holomorfa.

Observação 4.2. (1) Note-se que um isomorfismo local é sempre um homeomorfismo local: uma função contínua e bijectiva (localmente) cuja inversa local é também contínua.
(2) Em particular, estes isomorfismo locais são aplicações abertas (enviam abertos em abertos).
(3) Veremos abaixo que não é necessário exigir nesta formulação que a função inversa seja holormorfa. Por outras palavras, se f é holomorfa e bijectiva entre duas regiões, então a função inversa é automaticamente holomorfa!

4.1.2. Teorema da função inversa. Podemos enunciar agora o teorema da função inversa que é inteiramente análogo ao correspondente teorema no caso real.

Teorema 4.3. *(Teorema da função inversa). Seja $f \in H(\Omega)$ e $z_0 \in \Omega$. Se $f'(z_0) \neq 0$, então f é um isomorfismo local em z_0. Além disso, sendo $w_0 = f(z_0)$, temos $(f^{-1})'(w_0) = 1/f'(z_0)$.*

Demonstração. Usa-se o teorema da função inversa para funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$, notando que o determinante de $Df_{\mathbb{R}^2}$ é precisamente $|f'|^2$, pelo que esse teorema aplica-se precisamente para os pontos (x_0, y_0) onde $f'(x_0 + iy_0) \neq 0$. ... □

Vamos agora ver que o recíproco do teorema da função inversa também é verdade. Ou seja, se f é um isomorfismo local em z_0, então $f'(z_0) \neq 0$.

Observação 4.4. Note-se que este recíproco não é válido para funções reais de variável real. De facto, se $f(x) = x^3$ esta função é uma bijecção diferenciável, mas $f'(0) = 0$ (pelo que a inversa não é diferenciável).

Exercício 4.5. Mostre que se $f(z)$ é holomorfa e bijectiva localmente em z_0, então $f'(z_0) \neq 0$.

4.1.3. A série binómia. Vamos necessitar da expansão em série da função binómia. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$.

Lema 4.6. *A função binómia $(1+z)^\alpha$ admite a expansão*

$$(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n,$$

em que

$$\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!},$$

e esta série converge para $z \in \mathbb{D} = \mathbb{D}(0,1)$.

Demonstração. Para ver a convergência, basta fazer o teste da razão $|a_n|/|a_{n+1}| = |(n+1)/(\alpha - n)|$ que converge para 1 quando $n \to \infty$. Para verificar o desenvolvimento em série, basta fazer as derivadas em $z = 0$. □

Proposição 4.7. *Sejam $f \in \mathbb{D}(r')$ e $g \in \mathbb{D}(r)$ com $r, r' > 0$ e com $g(0) = 0$. Por outras palavras, f e g são séries convergentes da forma $f(w) = \sum_{n\geq 0} a_n w^n$ e $g(z) = \sum_{n\geq 1} b_n z^n$ (note que $b_0 = 0$). Então a composição $h(z) := f(g(z))$ é analítica num certo disco $\mathbb{D}(0,s)$, $s > 0$, e a série obtida por composição é da forma:*

$$h(z) = a_0 + \sum_{n\geq 1} a_n \left(\sum b_k z^k\right)^n = f(0) + \sum_{n\geq 1} c_n z^n,$$

válida para $|z| < s$.

Demonstração. Ver também o Lang. Note-se que a composição de funções holomorfas é holomorfa; para provar analiticidade, precisamos apenas de verificar diferenciabilidade em abertos. Como $g \in H(\mathbb{D}(0,r))$ para algum $r > 0$ e $f \in H(\mathbb{D}(0,r'))$ para certo $r' > 0$ (pois $g(0) = 0$), temos que $h := f \circ g$ é holomorfa em $\mathbb{D}(0,r) \cap g^{-1}(\mathbb{D}(0,r'))$. Como isto é um aberto em $\mathbb{D}(0,r)$, temos que existe $s > 0$ tal que $\mathbb{D}(0,s) \subset \mathbb{D}(0,r) \cap g^{-1}(\mathbb{D}(0,r'))$ e portanto, pelo Teorema de Taylor, $h = f \circ g$ é analítica em $\mathbb{D}(0,s)$. A última expressão segue de ser $h(0) = f(g(0)) = f(0)$. □

Exercício 4.8. Usando a Proposição 4.7, encontre uma nova demonstração do Teorema da Função Inversa.

Exemplo 4.9. Seja m inteiro positivo. Sabemos que $f(z) = (1+z)^{\frac{1}{m}} = \sum \binom{\frac{1}{m}}{n} z^n$, converge em $\mathbb{D}$. Seja $g(z)$ qualquer série convergente com $g(0) = 0$. Então $H(z) = f \circ g(z) = (1 + g(z))^{\frac{1}{m}} = \sum \binom{\frac{1}{m}}{n} g(z)^n$ é representada por uma série convergente com $H(0) = 1$; e temos $H(z) = 1 + h(z)$ com $(1 + h(z))^m = 1 + g(z)$.

Este exemplo mostra que as raizes índice m de $1 + g(z)$, quando $g(0) = 0$, estão sempre bem definidas numa vizinhança da origem (e valem 1 no ponto $z = 0$).

4.1.4. Forma local e multiplicidade. Para obter uma forma local, vejamos como escrever uma função holomorfa em torno de um ponto, em termos de isomorfismos locais.

Proposição 4.10. *(Forma local). Seja $f \in H(\Omega)$, não constante em qualquer disco centrado em $z_0 \in \Omega$. Então existe uma vizinhança $U \subset \Omega$ contendo z_0, um inteiro $m \geq 1$ e uma aplicação holomorfa $\varphi(z) \in H(U)$, com $\varphi(z_0) = 0$ e $\varphi'(z_0) \neq 0$ tal que, para z em U:*

$$f(z) = f(z_0) + \varphi(z)^m.$$

Demonstração. Para simplificar a notação, podemos assumir $z_0 = 0$. Como $f(z)$ é holomorfa em $0 = z_0 \in \Omega$, pelo teorema de Taylor, existe uma expansão em série

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = f(0) + \sum_{n\geq 1} a_n z^n$$

válida para certo disco $\mathbb{D}(0,r)$. Como $f(z)$ é não constante neste disco, existe o menor natural $m \geq 1$ tal que $a_m \neq 0$. Então, podemos escrever

$$f(z) = f(0) + a_m z^m (1 + g(z))$$

onde $g(z)$ é holomorfa em $\mathbb{D}(0,r)$ com $g(0) = 0$. Pelo exemplo anterior, considerando a raíz índice m de $1 + g(z)$, podemos escrever, com $\alpha^m = a_m$

$$f(z) = f(z_0) + (\alpha z)^m (1 + h(z))^m$$

para certa função holomorfa $h(z)$, com $h(0) = 0$. Pondo $\varphi(z) = \alpha z(1 + h(z))$ temos o pretendido, pois $\varphi(0) = 0$ e

$$\varphi'(0) = \alpha(1 + h(0)) + 0 = \alpha \neq 0.$$

□

Observação 4.11. (1) Note-se que a função $\varphi(z)$ da Proposição anterior, é um isomorfismo local em z_0, pelo TFI.

DEFINIÇÃO 4.12. O número natural m que aparece nesta Proposição chama-se a multiplicidade da função $f(z)$ em z_0, e escreve-se $m = \mathrm{mult}_{z_0} f$.

EXERCÍCIO 4.13. Seja $f \in \Omega$ e $z_0 \in \Omega$. Mostre que,
(a) Se $f(z_0) = 0$, então $\mathrm{ord}_{z_0} f = \mathrm{mult}_{z_0} f$.
(b) Se $f(z_0) \neq 0$, então $\mathrm{ord}_{z_0} f = \mathrm{mult}_{z_0}(f - f(z_0))$.

4.2. O teorema da aplicação aberta

A forma local que encontrámos acima tem uma consequência topológica importante. Começamos por detalhar um exemplo típico. Recorde-se que uma função entre dois espaços topológicos $h : A \to B$ chama-se aberta, se $h(U)$ é um conjunto aberto, para todo conjunto U aberto em A.

EXEMPLO 4.14. Como já vimos, um isomorfismo local num ponto z_0 é, em particular, uma função aberta $f|_U : U \to V$, para certos abertos U e V. Mais geralmente, se f é isomorfismo local em todos os pontos de um certo aberto Ω, então $f : \Omega \to f(\Omega)$ é uma aplicação aberta [Exercício!]. Em particular, a imagem, $f(\Omega)$, é um aberto.

LEMA 4.15. *Seja m um natural. A função $h(z) = z^m$ é aberta. Além disso, h é localmente invertível no ponto 0 se e só se $m = 1$.*

DEMONSTRAÇÃO. Se $m = 1$, h é a função identidade, que é obviamente aberta e invertível. Se $m > 1$, então não é invertível numa vizinhança de $w = 0$ (pois há sempre m raízes distintas de qualquer ponto numa vizinhança de $w = 0$), mas é ainda aberta, pois a imagem de um qualquer disco $\mathbb{D}(0, r)$ é o disco $\mathbb{D}(0, r^m)$. □

TEOREMA 4.16. *(Aplicação aberta). Se $f \in H(\Omega)$ é não constante em todos os discos $D \subset \Omega$, então é aberta.*

DEMONSTRAÇÃO. Uma função é aberta sse para todo z_0 em Ω existe vizinhança aberta $U \subset \Omega$, tal que $f(U)$ é aberto em $f(\Omega)$. Seja $z_0 \in \Omega$ e U a vizinhança do teorema da forma local. Então $f(z) = (p \circ \varphi)(z)$ onde $p(z) = f(z_0) + z^m$ é um simples polinómio e φ é o isomorfismo local em z_0. Como tanto p como φ são abertas, $f(U)$ é um aberto. □

4.2.1. Equivalência entre isomorfismo local e invertibilidade local. A forma local permite também mostrar o seguinte recíproco do teorema da função inversa.

TEOREMA 4.17. *Se f é um isomorfismo local em z_0, então $f'(z_0) \neq 0$.*

DEMONSTRAÇÃO. Usemos a forma local $f(z) = f(z_0) + \varphi(z)^m$ onde φ é um isomorfismo local e $m \in \mathbb{N}$. Se f é também isomorfismo local, temos que $m = 1$ (pois se $m > 1$, a função f não tem inversa local em z_0, dado que $\varphi(z)^m$ não é invertível). Logo $f'(z_0) = \varphi'(z_0) \neq 0$ como queriamos provar. □

Desta forma, o teorema da função inversa diz que uma função holomorfa é isomorfismo local em z_0 sse $\mathrm{mult}_{z_0} f = 1$.

COROLÁRIO 4.18. *Se $f \in H(\Omega)$ verifica $f'(z_0) = 0$, $z_0 \in \Omega$, então f não é localmente invertível em z_0, isto é, não existem vizinhanças $U \subset \Omega$ contendo z_0 e V contendo $f(z_0)$ tais que $f : U \to V$ seja bijectiva.*

4.2.2. Isomorfismos locais e globais.

DEFINIÇÃO 4.19. Dadas duas regiões Ω e Ω' de $\mathbb{C}$, dizemos que são isomorfas se existe uma aplicação (isomorfismo) holomorfa $f : \Omega \to \Omega'$ e bijectiva, cuja inversa $f^{-1} : \Omega' \to \Omega$ é holomoefa em Ω'.

Na realidade, a última condição é desnecessária, como podemos ver.

COROLÁRIO 4.20. *Se $f \in H(\Omega)$ e $f : \Omega \to f(\Omega)$ é bijectiva, então define um isomorfismo entre Ω e $f(\Omega)$. Em particular, se $f : \Omega \to f(\Omega)$ é bijectiva, então $f'(z)$ nunca se anula.*

DEMONSTRAÇÃO. Se f é holomorfa em Ω e $f'(z_0) = 0$ para certo z_0, então f não é bijectiva em torno de z_0. Logo, temos que $f'(z_0) \neq 0$ para todo $z_0 \in \Omega$, sempre que f é bijectiva. Assim, f é um isomorfismo local em todos os pontos de Ω, pelo que é um isomorfismo global! □

4.2.3. Funções conformes. Fazemos a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 4.21. Diz-se que $f \in H(\Omega)$ é conforme em $z_0 \in \Omega$ se preserva angulos.

Como conclusão do nosso estudo, obtemos o seguinte.

COROLÁRIO 4.22. *As seguintes condições são equivalentes para $f \in H(\Omega)$: (1) f é conforme em z_0; (2) $f'(z_0) \neq 0$ (3) f é um isomorfismo local em z_0. (4) f é localmente invertível.*

Note-se que este resultado não se verifica para funções reais de variável real. Por exemplo, a função diferenciável $f(x) = x^3$, não tem inversa diferenciável na origem, mas é localmente invertível (embora a inversa não seja diferenciável).

4.3. Princípio dos zeros isolados

Outra propriedade que advém do comportamento local das funções holomorfas é que o conjunto dos seus zeros é discreto.

Dada uma função $f \in H(\Omega)$, vamos denotar o seu conjunto de zeros por:

$$Z_f := \{z \in \Omega \, : \, f(z) = 0\} = f^{-1}(0).$$

Recorde que um subconjunto $A \subset \Omega$ diz-se discreto (para a topologia considerada em Ω) se para qualquer elemento $a \in A$, existe uma vizinhança U de a que não intersecta mais nenhum elemento de A, ou seja

$$A \cap U = \{a\}.$$

No caso da nossa topologia em regiões, sem perda de generalidade, para estas vizinhanças podemos tomar discos abertos.

TEOREMA 4.23. ***(Princípio dos zeros isolados)**: Se $f \in H(\Omega)$ é não constante e $f(z_0) = 0$, $z_0 \in \Omega$, então existe uma vizinhança de z_0, $V \subset \Omega$, onde o único zero de f é z_0.*

DEMONSTRAÇÃO. Se $f(z_0) = 0$ e $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ num disco $\mathbb{D}(z_0, r) \subset \Omega$, então $a_0 = 0$ e, dado que f é não constante seja $m = \mathrm{mult}_{z_0} f \geq 1$. Então

$$\begin{aligned} f(z) &= \textstyle\sum_{n=m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_m (z - z_0)^m + a_{m+1} (z - z_0)^{m+1} + \cdots = \\ &= (z - z_0)^m \left(a_m + a_{m+1}(z - z_0) + \cdots\right) = (z - z_0)^m g(z) \end{aligned}$$

onde $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{m+n} (z - z_0)^n$, $g(z_0) = a_m \neq 0$. Como $g \in H(\mathbb{D}(z_0, r))$, $g(z)$ é contínua e existe uma vizinhança V de z_0 tal que $g(z) \neq 0$, $\forall z \in V$. Como o único zero de $(z - z_0)^m$ é em z_0, obtemos o pretendido. □

Recorde-se que um ponto de acumulação do subconjunto $A \subset \Omega$ é um ponto $a \in A$ que não é discreto, ou seja, qualquer vizinhança U de a contém outros elementos de A além de a:

$$(U \cap A) \setminus \{a\} \neq \emptyset.$$

Isto equivale a existir uma sequência de elementos distintos $a_k \in A$ que tendem para $a \in A$ (na topologia de subconjunto de Ω).

TEOREMA 4.24. *Para $f \in H(\Omega)$ as seguintes afirmações são equivalentes:*
(1) $f \equiv 0$ *em* Ω
(2) $\exists a \in \Omega$ *tal que* $f^{(n)}(a) = 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$
(3) Z_f *tem um ponto de acumulação em* Ω.

DEMONSTRAÇÃO. É imediato que (1) implica (2) e (3). Para provar que (3) $\Rightarrow$ (2) vamos supor que z_0 é um ponto de acumulação de $Z_f = f^{-1}(0)$ e que $z_k \to z_0$ é uma sucessão de zeros de f em $\Omega \setminus \{z_0\}$: Seja $m \in \mathbb{N}$ o primeiro natural tal que $f^{(m)}(z_0) \neq 0$. Então $f(z) = \displaystyle\sum_{n=m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^m g(z)$ com $g(z_0) \neq 0$. Como $(z_k - z_0)^m \neq 0$ e $f(z_k) = 0$ obtemos $g(z_k) = 0$ o que contradiz o facto de g ser contínua; logo podemos por $a = z_0$ e $f^{(n)}(a) = 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}_0$.

Para provar que (2) $\Rightarrow$ (1) seja $A = \left\{z \in \Omega : f^{(n)}(z) = 0 \; \forall n \in \mathbb{N}_0\right\}$. Por hipótese $A \neq \emptyset$. A é fechado porque se $z_k \to z$ ($z_k \in A$) então $f^{(n)}(z_k) = 0 \; \forall n \geq 0$ o que implica $f^{(n)}(z) = 0$ pela continuidade da $n-$ésima derivada de f; logo $z \in A$. A é também aberto porque se $z_0 \in A$ então

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ num certo disco $\mathbb{D}(z_0, r)$, e como $a_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0) = 0$, temos que $f(z) = 0$ para todo o $z \in \mathbb{D}(z_0, r)$; assim $\mathbb{D}(z_0, r) \subset A$. Como A é aberto, fechado e não vazio e Ω é conexo, $A = \Omega$. □

Considerando a função $h(z) = f(z) - g(z)$ e aplicando este teorema obtemos o chamado princípio da igualdade:

TEOREMA 4.25. ***(Princípio da igualdade):*** *Sejam $f, g \in H(\Omega)$. $f(z) = g(z)$ $\forall z \in \Omega$, se e só se o conjunto $\{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$ tem um ponto de acumulação.*

4.4. Princípio do módulo máximo

Podemos agora provar o princípio do módulo máximo e o dos zeros isolados que são, no fundo, resultados válidos para as séries de potências convergentes.

TEOREMA 4.26. ***(Princípio do módulo máximo):*** *Se $f \in H(\Omega)$ e $|f(z)|$ tem um máximo local em $z_0 \in \Omega$, então f é constante em Ω.*

DEMONSTRAÇÃO. Se $D := \mathbb{D}(z_0, R) \subset \Omega$ então podemos escrever a expansão

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n(z-z_0)^n = f(z_0) + \sum_{n \geq 0} a_n(z-z_0)^n,$$

válida para $z \in D \subset \Omega$. Supondo que f não é constante em D $(f(z) \neq a_0 = f(z_0))$, como vimos atrás, f é aberta, pelo que $f(D)$, a imagem de D contém um disco aberto $D' := \mathbb{D}(a_0, s) \subset f(D)$ centrado em $a_0 = f(z_0)$. Assim, a função $h(z) := |f(z)|$ verifica $h(z_1) > h(z_0) = |a_0|$ para certo $z_1 \in D'$. Assim, z_0 não é máximo local de $h(z)$ em D.

Provámos que se $|f|$ tem máximo local em z_0 então é constante igual a $f(z_0)$ num certo disco $D \subset \Omega$. Finalmente, pelo princípio da igualdade (Teorema 4.25), temos que $f(z)$ é constante em todo Ω, pois D tem pontos de acumulação. □

Este teorema tem a seguinte formulação que é muitas vezes útil. Se Ω é uma região limitada, o seu fecho é compacto e portanto, pelo teorema de Weiesstrass $|f(z)|$ tem um máximo absoluto em $\overline{\Omega}$. Se o máximo estiver em Ω então é um máximo local, e pelo teorema anterior f é constante. Assim, obtemos:

COROLÁRIO 4.27. *Se f é holomorfa e não constante numa região limitada Ω, o máximo de $|f(z)|$ em $\overline{\Omega}$ é atingido na fronteira de Ω.*

4.5. Existência de primitivas locais

O Teorema da Taylor diz-nos que uma função holomorfa (ou diferenciável) é infinitamente diferenciável. Como sabemos, a *primitivação* é a operação inversa da derivação, e é natural pretender saber quando é que uma função admite uma *primitiva.* Veremos, em particular detalhe no Capítulo 6 que a resposta depende, em geral, da região considerada. Por outro lado, quando a região é suficientemente simples, como no caso dos discos, vemos que a resposta é também simples e satisfatória: qualquer função holomorfa num disco é infinitamente primitivável, nesse disco.

Comecemos pela definição de primitiva, noção inversa à de derivada, mas onde enfatizamos o papel desempenhado pela região (o que, infelizmente, não é muito realçado noutras referências, mesmo nas referências mais clássicas da Análise complexa).

DEFINIÇÃO 4.28. Seja Ω uma região em $\mathbb{C}$. Uma função contínua $f : \Omega \to \mathbb{C}$ diz-se primitivável em Ω se existe uma outra função F, diferenciável em Ω, tal que $F' \equiv f$ em Ω. Neste caso, a função F chama-se uma primitiva de f em Ω.

O exemplo canónico, para mostrar que a consideração da região é fundamental,
no problema da primitivação, é o seguinte.

EXEMPLO 4.29. Seja $f(z) = \frac{1}{z}$. Se $\Omega = \mathbb{H}$, o semiplano superior, então $f(z)$ admite a primitiva

$$F(z) := \log z = \log|z| + i \arg z, \quad \arg z \in]0, \pi[,$$

pois esta função verifica ambas as condições: $F \in H(\mathbb{H})$ e $F'(z) = f(z)$ para qualquer $z \in \mathbb{H}$. Por outro lado $f \in H(\mathbb{C}^*)$, mas $f(z)$ não tem nenhuma primitiva $F(z)$ que verifique $F'(z) = f(z)$ para todo o $z \in \mathbb{C}^*$, pois em qualquer disco $D \subset \mathbb{C}^*$ qualquer primitiva de $\frac{1}{z}$ é $\log z + k$ para uma constante $k \in \mathbb{C}$, mas $\log z$ não define uma função contínua em $\mathbb{C}^*$.

Proposição 4.30. *Seja D um disco e $f \in H(D)$. Então $f(z)$ é primitivável em D. Mais precisamente, se $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ é a sua representação em série, então uma primitiva é dada, neste disco, por:*

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z - z_0)^{n+1}.$$

Demonstração. Basta usar as noções de convergência de séries de potências em discos, pelo que é deixada para o leitor. □

4.6. O teorema de Casoratti-Weierstrass

Recordemos que $z_0 \in \mathbb{C}$ é uma singularidade essencial de uma função $f(z)$ se existe um disco $\mathbb{D}(z_0, r)$ onde $f(z)$ é representada por uma série de Laurent (convergente nesse disco) cuja parte principal é infinita.

Teorema 4.31. *Seja Ω uma região e $z_0 \in \Omega$. Se z_0 é uma singularidade essencial de $f \in H(\Omega \setminus \{z_0\})$ então a imagem de f é densa em $\mathbb{C}$. Isto é, $\mathbb{C} = \overline{f(\Omega \setminus \{z_0\})}$.*

Demonstração. Supor por contradição que existe $w \in \mathbb{C}$ que não é ponto de acumulação de $f(\Omega \setminus \{z_0\})$. Assim, existe disco centrado em w que não contém números da forma $f(z)$ com $z \in \Omega \setminus \{z_0\}$. Ou seja, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(z) - w| > \delta, \quad \forall z \in \Omega \setminus \{z_0\}.$$

Seja $g(z) = \frac{1}{f(z)-w}$ que é holomorfa em $\Omega \setminus \{z_0\}$. Por hipótese $|g(z)| = \frac{1}{|f(z)-w|} < \frac{1}{\delta}$ pelo que g é limitada em qualquer vizinhança de z_0. Assim, pelo teorema das singularidades removíveis de Riemann, g pode ser extendida a uma função $g \in H(\Omega)$. Podemos então escrever, num disco $\mathbb{D}(z_0, r)$

$$g(z) = (z - z_0)^m h(z)$$

com $h(z_0) \neq 0$ e $h \in H(\Omega)$. Assim, $\lim_{z \to z_0} \frac{(z_0 - z)^m}{g(z)} = \frac{1}{h(z)}$ existe, o que implica que $\frac{1}{g(z)}$ tem um pólo de ordem m em z_0. Por outro lado, $\frac{1}{g(z)} = f(z) - w$ tem por hipótese uma singularidade essencial em z_0. □

Mais tarde veremos o teorema de Picard que afirma que muito mais é verdade: $f(\Omega \setminus \{z_0\})$ é de facto todo $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{C} \setminus \{w\}$, se z_0 é singularidade essencial.

4.7. Problemas

4.1 Seja f holomorfa em Ω, e $z_0 \in \Omega$. Suponha que $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n(z - z_0)^n$ é uma expansão válida num certo disco $D \subset \Omega$. Mostre que $f^{(n)}$ é um isomorfismo local em z_0 se e só se $a_{n+1} \neq 0$.

4.2 Seja $f \in H(\Omega)$ e $z_0 \in \Omega$. Define-se a multiplicidade de f em z_0, $mult_{z_0} f$, pela igualdade $mult_{z_0} f = ord_{z_0}(f(z) - f(z_0))$. Mostre que $mult_{z_0} f \geq 1$ e que $mult_{z_0}(g \circ f) = mult_{z_0} f \cdot mult_{f(z_0)} g$, sempre que g é holomorfa numa região contendo $f(z_0)$.

4.3 Seja $F(z, w)$ uma função holomorfa de duas variáveis em Ω, isto é $F(z, w)$ é holomorfa, como função de $z \in \Omega$ quando $w \in \Omega$ está fixo, e o mesmo se passa com z e w trocados. Seja $A \subset \Omega$ um conjunto com um ponto de acumulação e suponha que $F(z, w) = 0$ para todo $z, w \in A$. Mostre que $F(z, w) = 0$ para todo $z, w \in \Omega$.

4.4 Mostre o teorema do módulo mínimo: Se uma função $f(z)$ holomorfa numa região Ω atinge um mínimo do seu módulo no ponto $z_0 \in \Omega$ sem que se verifique $f(z_0) = 0$, então f é constante.

4.5 Seja Ω uma região em $\mathbb{C}$ e $f \in H(\Omega)$. Prove que se $\Re f$ ou $\Im f$ (partes reais e imaginárias de f) têm um máximo local num ponto $z_0 \in \Omega$, então $f(z)$ é constante em Ω.

4.6 (Lema de Schwarz) Seja f uma função holomorfa no disco unitário $\mathbb{D}$, com $f(0) = 0$ e $|f(z)| < 1$, para todo o $z \in \mathbb{D}$. Mostre que $g(z) = f(z)/z$ é uma função holomorfa em $\mathbb{D}$ e prove que $|f(z)| \leq |z|$ para todo o $z \in \mathbb{D}$.

4.7 Seja $f(z)$ holomorfa numa região convexa Ω. Mostre que $f(z)$ é primitivável em Ω.

4.7 Sejam f e g duas funções inteiras tais que $|f(z)| \leq |g(z)|$. Prove que existe uma constante $c \in \mathbb{C}$, com $|c| \leq 1$, tal que $f(z) = cg(z)$. (Sugestão: use o teorema das singularidades removíveis de Riemann).

4.8 Seja f uma função inteira e sejam A e a números reais positivos tais que $|f(z)| \leq A|z|^a$, para todo o z com módulo suficientemente grande. Prove que f é um polinómio de grau $n < a+1$.

CAPíTULO 5

Funções Harmónicas

Neste capítulo, estudaremos as funções harmónicas, que podem ser vistas, em muitos aspectos, como o análogo, com valores reais, das funções holomorfas.

5.1. Definição e primeiras propriedades

Definição 5.1. Seja Ω uma região em $\mathbb{C}$. Uma função $u : \Omega \to \mathbb{R}$ diz-se harmónica em Ω se é de classe C^2 em Ω e verifica a equação de Laplace $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, em todos os pontos de Ω.

Como o operador de Laplace é linear, o conjunto das funções harmónicas numa dada região Ω é um espaço vectorial que vamos denotar por $\mathcal{H}(\Omega)$.

Note-se que o produto de funções harmónicas não é necessariamente uma função função harmónica, pelo que $\mathcal{H}(\Omega)$ não tem estrutura de anel, em contraste com o caso do anel das funções holomorfas $H(\Omega)$.

Usando os operadores diferenciais $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})$ e $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})$, é fácil ver que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{4}\Delta u.$$

Assim, uma outra forma de escrever a equação de Laplace $\Delta u = 0$ é:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\, \partial \bar{z}} = 0.$$

5.1.1. Funções harmónicas e funções holomorfas. A relação mais simples entre funções harmónicas e funções holomorfas é a seguinte.

Proposição 5.2. *As partes real e imaginária de uma função holomorfa são ambas harmónicas.*

Demonstração. Podemos usar directamente as equações de Cauchy-Riemann. Em alternativa, usamos os operadores acima. Sendo $f \in H(\Omega)$ e $u = \Re f$ temos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{\partial^2 \Re f}{\partial z \partial \bar{z}} = \Re\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}}\right) = \Re\left(\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}})\right) = 0,$$

uma vez que $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f = 0$. O mesmo se aplica a $v = \Im f$. □

Dadas funções u e v harmónicas arbitrárias, a função $f = u + iv$ não é necessariamente holomorfa. Quando existe $f \in H(\Omega)$ tal que $f = u + iv$, diz-se que v é a harmónica conjugada de u.

O recíproco da Proposição 5.2 é apenas válido localmente, e em regiões simplesmente conexas.

Para verificar isto, usamos a seguinte construção (esta válida para qualquer região).

Lema 5.3. *Seja Ω uma região arbitrária. Se $u \in \mathcal{H}(\Omega)$, então $g := \frac{\partial u}{\partial z}$ é uma função holomorfa em Ω.*

Demonstração. Basta ver que

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\frac{\partial u}{\partial z}) = \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z} \partial z} = 0.$$

□

Teorema 5.4. *Se Ω é uma região convexa, e u é harmónica em Ω, então existe uma função holomorfa $f \in H(\Omega)$ cuja parte real é u. A diferença de duas tais funções é uma constante imaginária pura.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $g = 2\frac{\partial u}{\partial z}$. Então $g \in H(\Omega)$ pela Proposição anterior. Como Ω é convexa, g tem uma primitiva holomorfa em Ω (ver TFC). Sendo $f(z) = f_1 + if_2$ uma primitiva de g temos:

$$f'(z_0) = \frac{\partial f_1}{\partial x} - i\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y},$$

onde usámos as equações de Cauchy-Riemann para f. Assim, u e f_1 diferem de uma constante real. Podemos escolher a constante igual a zero, e assim, $u = \Re f$. Temos também

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x},$$

o que define f_2 a menos de constante. Esta última pode ser arbitrária. □

5.2. Propriedades locais das funções harmónicas

Uma função harmónica verifica a propriedade do valor médio:

TEOREMA 5.5. *(Teorema do valor médio) Seja u harmónica em Ω e $\bar{D} \subset \Omega$ um disco fechado centrado em z_0. Então:*

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})d\theta,$$

onde r é o raio do disco $\bar{D}$.

DEMONSTRAÇÃO. Usar a fórmula integral de Cauchy para f tal que $f = \Re u$. □

Temos também:

TEOREMA 5.6. *(Princípios do módulo máximo e mínimo). Seja u uma função harmónica em Ω.*
(1) Se u atinge um máximo local em $z_0 \in \Omega$, então u é constante em Ω.
(2) Se u atinge um mínimo local em $z_0 \in \Omega$, então u é constante em Ω.
(3) Se $\overline{\Omega}$ é compacto e u é contínua em $\overline{\Omega}$, então o máximo e o mínimo global de u estão em $\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega$, a fronteira de Ω.

DEMONSTRAÇÃO. ... □

O princípio da identidade para funções holomorfas permite mostrar o seguinte "princípio da extensão".

PROPOSIÇÃO 5.7. *Se u é harmónica em Ω e $f \in H(\Omega)$ tal que $u = \Re f$ num pequeno disco, então $u = \Re f$ em Ω.*

DEMONSTRAÇÃO. Exercício. □

5.3. Propriedades globais de funções harmónicas

Para estudarmos algumas propriedades globais das funções harmónicas, começamos por uma representação local de uma função harmónica numa região anelar. Este resultado pode considerar-se o análogo da representação em série de Laurent das funções holomorfas.

TEOREMA 5.8. *Seja $D^* = \mathbb{D}^*(0,r)$ um disco perfurado centrado na origem e $u \in \mathcal{H}(D^*)$. Então existem $\alpha \in \mathbb{R}$ e $g \in H(D^*)$ tais que*

$$u(z) = \Re(g(z)) + \alpha \log|z|$$

DEMONSTRAÇÃO. A ideia é usar duas regiões simplesmente connexas cuja união é D^*. □

Temos também a seguinte generalização ao caso de vários pontos isolados.

TEOREMA 5.9. *Seja Ω uma região simplesmente conexa e $\Omega^* = \Omega \setminus \{z_1, \cdots, z_n\}$. Se u é harmónica em Ω^* então existem constantes reais $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ e uma função $f \in H(\Omega)$ tais que*

$$u(z) = \Re(f(z)) + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \log|z - z_j|$$

DEMONSTRAÇÃO. ... □

Este estudo permite mostrar o análogo do teorema das singularidades removíveis de Riemann para funções harmónicas.

TEOREMA 5.10. *Seja $u(z)$ harmónica e limitada no disco perfurado $D^* = \mathbb{D}^*(z_0, r)$. Então u pode estender-se a uma função harmónica em $\mathbb{D}(z_0, r)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Sabemos que $u(z) = \Re(g(z)) + \alpha \log|z - z_0|$ para certa função $g \in H(D^*)$. Assim, podemos escrever a série de Laurent de $g(z)$:

$$g(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n,$$

válida para $z \in D^*$. Para mostrar o teorema, vamos verificar que a condição de u ser limitada implica que g se estende a $g \in H(\mathbb{D}(z_0, r))$. Suponhamos que 0 é singularidade essencial de $g(z)$, e que $\alpha > 0$. Então, existe $M > 0$ tal que para $|z - z_0|$ suficientemente pequeno, $\Re g(z) = u(z) - \alpha \log|z - z_0| < -M$, pelo que $g(z)$ evita um conjunto aberto de $\mathbb{C}$. O caso $\alpha < 0$ é análogo, donde g não pode ter uma singularidade essencial, pelo teorema de Casoratti-Weierstrass. Os pólos também podem ser excluídos, usando estimativas para $|u|$ perto de z_0, pelo que a série de g só tem parte regular. Assim, provamos que g se estende ao disco. Isto implicaria que $\alpha = 0$, pois é a única forma de garantir que u e $\Re g$ são limitadas em D^*. □

5.4. O problema de Dirichlet no disco

Como vimos, as funções harmónicas verificam a propriedade do valor médio. Na realidade, veremos agora que esta propriedade caracteriza as funções harmónicas. Para chegar a este resultado, vamos primeiro considerar um problema em equações diferenciais parciais de valor fronteira. Este problema muito relevante é o problema de Dirichlet no disco. Trata-se de considerar uma função contínua $\varphi : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$ e de resolver o seguinte problema de valor fronteira (também chamado EDP com condições de Dirichlet):

$$\begin{cases} \Delta u(z) = 0, & z \in \mathbb{D} \\ u(z) = \varphi(z), & z \in \partial\mathbb{D}. \end{cases}$$

Consideremos em primeiro lugar a seguinte função, chamada o núcleo de Poisson.

DEFINIÇÃO 5.11. Para $r \in [0, 1[$ e $\theta \in]-\pi, \pi[$, definimos:

$$P_r(\theta) := \frac{1}{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2} = \frac{1}{2\pi} \Re\left(\frac{e^{i\theta} + r}{e^{i\theta} - r}\right).$$

OBSERVAÇÃO 5.12. Podemos ver de imediato as seguintes propriedades de $P_r(\theta)$.
(1) $P_r(\theta)$ é de classe C^∞ em $\mathbb{D}$
(2) $P_r(\theta) \geq 0$
(3) $P_r(\theta) = P_r(-\theta)$ (é par na variável θ)

PROPOSIÇÃO 5.13. *A área delimitada por $P_r(\theta)$ é 1.*

TEOREMA 5.14. *Seja $\varphi : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ uma função contínua (e $\varphi(\pi) = (-\pi)$). Então existe $u \in C(\bar{\mathbb{D}})$ e harmónica em $\mathbb{D}$ tal que $u(e^{i\theta}) = \varphi(\theta)$. Precisamente, esta função é dada por $u(z) := P_r * \varphi$, ou explicitamente*

$$u(re^{i\theta}) = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - \tau)\varphi(\tau)\, d\tau.$$

DEMONSTRAÇÃO. Esta demonstração é longa e usa técnicas de teoria das distribuições. Consulte-se o Lang. □

TEOREMA 5.15. *Se uma função contínua satisfaz a propriedade do valor médio em Ω então é harmónica em Ω.*

DEMONSTRAÇÃO. Basta mostrar que u é harmónica num qualquer disco $D = \mathbb{D}(z_0, R) \subset \Omega$. Suponha-se que $u(z_0) \geq u(z_0 + re^{i\theta})$ para todo $r \leq R$, então u é constante numa vizinhança de z_0. Isto porque, se $u(z_1) < u(z_0)$ então existe uma vizinhança de z_1 e $\varepsilon > 0$ tal que $u(z) \leq u(z_0) - \varepsilon$, contrariando a propriedade do valor médio, pois

$$\int_{-\pi}^{\pi} u(z_0) - u(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta > 0.$$

Assim, temos a propriedade do máximo, e analogamente, a propriedade do mínimo. Para provar que u é harmónica, seja v a solução (função harmónica) do problema de Dirichelet no disco $\mathbb{D}(z_0, r)$ cujo fecho está em Ω, e cujos valores na fronteira coincidem com os de u. Assim, $u - v = 0$ nesta fronteira, e também satisfaz a propriedade de mínimo e máximo em $\mathbb{D}(z_0, r)$, pelo que $u - v$ tem o máximo e o mínimo na fronteira, pelo que $u = v$, neste disco. □

5.5. Problemas

5.1 Seja u harmónica de classe C^∞, e denote por u_x (resp. u_y) a derivada parcial de u relativamente a x (resp. y). Mostre que

$$\Delta u_x = \frac{\partial}{\partial x}\Delta u, \qquad \Delta u_y = \frac{\partial}{\partial y}\Delta u.$$

Conclua que todas as derivadas parciais de u são harmónicas.

5.2 Seja f holomorfa em Ω e u harmónica em $f(\Omega)$. Mostre que $u \circ f$ é harmónica em Ω.

5.3 Mostre que uma função harmónica não constante num disco é uma aplicação aberta.

5.4 Considere uma região $\Omega \subset \mathbb{C}$, uma função u harmónica em Ω e $f \in H(\Omega)$. Supondo que $u = \Re f$ num certo disco aberto (não vazio) $D \subset \Omega$, mostre que $u = \Re f$ em todo Ω.

5.5 Seja u harmónica em $\mathbb{C}^*$ tal que $u(z) = \phi(|z|)$. Mostre que existem a e b reais tais que $u = a + b \log |z|$.

5.6 Seja $P_r(\theta)$ o núcleo de Poisson, defiido para $0 \le r < 1$ e $\theta \in [0, 2\pi]$, através de

$$P_r(\theta) = \frac{1}{2\pi}\frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2}.$$

Seja $u \ge 0$ uma função harmónica em $\mathbb{D}(0, 1)$ e contínua em $\overline{\mathbb{D}}$. Mostre as desigualdades

$$\begin{aligned} \frac{1-r}{1+r} \le \quad & 2\pi P_r(\theta) & \le \frac{1+r}{1-r} \\ \frac{1-r}{1+r}u(0) \le \quad & u(re^{i\theta}) & \le \frac{1+r}{1-r}u(0). \end{aligned}$$

5.7 (Teorema de Harnak) Seja u_n uma sucessão de funções harmónicas no disco unitário $\mathbb{D}$ que converge uniformemente em subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$. Prove que o limite é uma função harmónica.

5.8 Prove que uma função u é harmónica na região Ω se e só se satisfaz a propriedade do valor médio em discos de Ω, isto é se, para qualquer $z \in \Omega$ e disco $\mathbb{D}(z, r)$ centrado em z e totalmente contido em Ω, se verifica:

$$u(z) = \frac{1}{\pi r^2}\int_{\mathbb{D}(z,r)} u \, dx \, dy.$$

CAPíTULO 6

Cálculo Integral no Plano Complexo

Em capítulos anteriores, apresentámos alguns resultados cujos argumentos e enunciados utilizaram integrais de funções holomorfas ao longo de cinrcunferências. De facto, as circunferências aparecem naturalmente ao considerar a propriedade do valor médio e vários outros resultados como, por exemplo, o teorema de Taylor.

Para aprofundar o estudo das propriedades globais das funções holomorfas, em particular daquelas que se relacionam com questões de natureza topológica, necessitamos agora de desenvolver o cálculo integral ao longo de curvas contínuas mais gerais em $\mathbb{C}$.

Neste capítulo, introduzimos o cálculo integral no plano complexo na sua generalidade, e desenvolvemos os seus métodos fundamentais. Em particular, abordamos os teoremas de Cauchy e o conhecido teorema dos resíduos (em versões ainda sem a máxima generalidade), bem como algumas das suas aplicações. As relações entre integrais complexos e as propriedades topológicas de regiões no plano, são deixadas para o capítulo seguinte.

6.1. Definição do integral no plano complexo

Seja $[a, b]$ um intervalo, que não se reduz a um ponto, na recta real ($a < b \in \mathbb{R}$).

6.1.1. Caminhos no plano complexo. Um caminho é um percurso no plano complexo, imaginado como um conjunto de pontos que estão a ser percorridos à medida que o tempo avança. Assim, é descrito por uma função de uma variável real, $t \in [a, b] \subset \mathbb{R}$, com valores em $\mathbb{C}$ ou numa certa região.

Definição 6.1. Um caminho (no plano complexo) é uma aplicação contínua $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ que verifica:

(i) γ é seccionalmente regular, isto é, $\gamma'(t)$ existe excepto para um número finito de valores de $t \in [a, b]$, e
(ii) γ é rectificável, isto é, satisfaz $\int_a^b |\gamma'(t)|\, dt < +\infty$.

Diz-se que o caminho γ começa em $\gamma(a)$ e termina em $\gamma(b)$.

As propriedades que exigimos para a função $\gamma(t)$ (seccionalmente regular e rectificável), são motivadas pela possibilidade de, nessas condições, podermos definir o conceito de *comprimento* do caminho γ.

Definição 6.2. O comprimento do caminho $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ é o número real

$$C(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt,$$

que é finito, pois γ é rectificável.

Observação 6.3. (a) O integral em $C(\gamma)$ pode ser impróprio no sentido de Riemann, se a função $\gamma'(t)$ for ilimitada (ver o Exemplo 6.4(4)). No entanto, havendo um número finito de pontos onde $\gamma'(t)$ não está definida, nunca precisaremos de aplicar a teoria, mais geral, do intergal de Lebesgue.
(b) Poderiamos ter exigido que as derivadas laterais de $\gamma'(t)$ existissem nos extremos, a e b, do intervalo. Nesse caso, pode provar-se que γ é automaticamente rectificável. No entanto, preferimos manter a definição acima, que realça os dois pontos importantes da definição de caminho, tal como a usamos.

Os exemplos abaixo ilustram a importância de indicar sempre o domínio de definição de um caminho $\gamma(t)$.

Exemplo 6.4. (1) Um caminho que percorre a semi-circunferência unitária no semi-plano superior $\Gamma := \{z \in \mathbb{H} : |z| = 1\}$, é, por exemplo $\gamma(t) := e^{it}$ com $t \in [0, \pi]$. Uma vez que $\gamma'(t) = ie^{it}$, o seu comprimento é

$$C(\gamma) = \int_0^\pi |ie^{it}|dt = \int_0^\pi 1\,dt = \pi,$$

como esperado.

(2) O segmento de recta entre z e w é definido pelo caminho

$$\gamma(t) := tw + (1-t)z,$$

para $t \in [0,1]$.

(3) Um caminho constante é uma função da forma $\gamma(t) = z_0$ para todo $t \in [a,b]$.

(4) Seja $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ definida por $\gamma(t) = x\sin\left(\frac{1}{t}\right)$, $\gamma(0) = 0$. Temos que γ é seccionalmente regular, pois é contínua em $[0,1]$ mas não é rectificável, como o leitor poderá verificar. Note que, neste caso $\gamma'(0)$ não existe.

Para a determinação do comprimento de um caminho, é importante o cáculo da derivada $\gamma'(t)$. O número complexo $\gamma'(t)$ tem uma interpretação geométrica muito importante: é o *vector tangente* à *curva* que $\gamma(t)$ percorre, como veremos a seguir.

Para o cálculo de $\gamma'(t)$ podemos escrever $\gamma(t)$ na forma polar ou na cartesiana. No caso de escrevermos $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, temos

$$\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)\,,$$

e $|\gamma'(t)|^2 = x'(t)^2 + y'(t)^2$, sempre que $\gamma'(t)$ está definido.

No caso de termos $\gamma(t) = r(t)e^{i\theta(t)}$ temos, pela regra da cadeia, desde que $r(t) > 0$:

$$\gamma'(t) = r'(t)e^{i\theta(t)} + i\theta'(t)r(t)e^{i\theta(t)} = \left(\frac{r'(t)}{r(t)} + i\theta'(t)\right)\gamma(t).$$

Esta fórmula é útil para cincunferências centradas na origem. Por exemplo, quando $\gamma(t) = re^{cit}$ para constantes c e $r > 0$, temos a relação simples entre o caminho e a sua derivada $\gamma'(t) = ic\gamma(t)$.

6.1.2. Caminhos e Curvas. Consideremos um caminho $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ arbitrário. Em várias situações, tanto de natureza geométrica como para o cálculo integral, é mais relevante o *conjunto imagem*, isto é o conjunto

$$\Gamma := \{\gamma(t) :\ t \in [a,b]\} \subset \mathbb{C}$$

do que a própria função $t \mapsto \gamma(t)$. Conjuntos obtidos desta forma chamam-se *curvas*.

Definição 6.5. Sejam $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$. Uma curva (orientada) de z_0 a z_1 é a imagem $\Gamma \subset \mathbb{C}$ de um caminho $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ que começa em $\gamma(a) = z_0$ e termina em $\gamma(b) = z_1$. Diz-se também que z_0 é o ponto inicial de Γ e que z_1 é o ponto final. Em conjunto, z_0 e z_1 são chamados os extremos de Γ. Neste caso, dizemos que γ é uma parametrização de Γ, e escrevemos $\Gamma = (\gamma)$.

A um caminho associamos uma única curva, a sua imagem. Mas naturalmente, para cada curva Γ em $\mathbb{C}$, existem múltiplas (infinitas) parametrizações de Γ.

Observação 6.6. (1) Dado um caminho $\gamma(t)$ definido em $[a,b]$, o caminho $\gamma\,(bt + (1-t)a)$ definido em $[0,1]$ parametriza a mesma curva. Assim, há situações em que vale a pena definir todos os caminhos no *intervalo padrão* [0,1].
(2) Os três caminhos $\sigma(t) = e^{2\pi it}$, $t \in [0,1]$, $\eta(t) = e^{it}$, $t \in [-\pi,\pi]$, e $\nu(t) = e^{-2\pi it}$, $t \in [0,1]$ parametrizam a mesma circunferência, o último caminho sendo o único percorrido no sentido horário.
(3) Poderiamos definir curvas sem distinguir o ponto inicial do final (o que seria uma curva não orientada). Para efeitos do cálculo integral que vamos desenvolver, sendo a orientação muito importante, esta fará sempre parte da nossa definição de curva.

Proposição 6.7. *Seja $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ um caminho e $t_0 \in [a,b]$ tal que $\gamma'(t_0)$ está definido. Então $\gamma'(t_0)$ é um vector tangente à curva $\Gamma = (\gamma)$, no ponto $\gamma(t_0)$ e tem norma igual a $|\gamma'(t_0)|$.*

Demonstração. Deixada para o leitor. □

Observação 6.8. O sentido do vector $\gamma'(t)$ coincide com o sentido em que se percorre o conjunto $\Gamma = \{\gamma(t) :\ t \in [a,b]\}$, ou seja, com t a variar desde a até $b > a$.

Tal como seria de esperar de acordo com a interpretação geométrica da noção de comprimento, não é difícil verificar que o comprimento de um caminho depende apenas da curva correspondente.

Proposição 6.9. *Se γ e $\tilde\gamma$ são caminhos que parametrizam a mesma curva Γ, então $C(\gamma) = C(\tilde\gamma)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Usa-se o facto de que $|(\gamma\circ\varphi)'(t)| = |\gamma'(\varphi(t))|\,|\varphi'(t)|$ e a fórmula de mudança de variável. $\square$

Desta forma, podemos definir (o que faremos) o comprimento de uma curva Γ como o comprimento de qualquer caminho que a parametrize. Mais precisamente:

DEFINIÇÃO 6.10. Se Γ é a curva imagem do caminho γ, o comprimento de Γ é dado pelo integral $\int_a^b |\gamma'(t)|\,dt$, e também se denota por $C(\Gamma) = C(\gamma)$.

EXERCÍCIO 6.11. Mostre que uma curva é um subconjunto compacto de $\mathbb{C}$.

Sejam z e w dois pontos de $\mathbb{C}$. O segmento de recta entre z e w será denotado por $[z,w]\subset\mathbb{C}$.

EXERCÍCIO 6.12. Use a parametrização de $[z,w]$ dada em 6.4(2) para mostrar que:

$$C([z,w]) = |z-w|.$$

A noção de curva permite definir o que se chama um conjunto conexo por arcos.

DEFINIÇÃO 6.13. Seja $X\subset\mathbb{C}$ um subconjunto (não é necessariamente aberto). Dizemos que X é conexo por arcos se, para quaisquer dois pontos $z,w\in X$ existe uma curva $\Gamma\subset X$ com extremos z e w.

Convém recordar que um conjunto X é chamado conexo se não existem abertos não vazios $U,V\subset\mathbb{C}$ tais que

$$X = (X\cap U)\cup(X\cap V).$$

TEOREMA 6.14. *Se X é conexo por arcos, então é conexo.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver apêndice. $\square$

O recíproco não é verdade em geral, mas verifica-se em cunjuntos abertos.

TEOREMA 6.15. *Seja $U\subset\mathbb{C}$ um conjunto aberto. Então U é conexo se e só se é conexo por arcos.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver apêndice. $\square$

COROLÁRIO 6.16. *Seja $\Omega\subset\mathbb{C}$ uma região. Então Ω é conexo por arcos. Assim, dados quaisquer dois pontos z e w em Ω, há sempre pelo menos uma curva com início em z e final em w.*

6.1.3. Integral ao longo de uma curva; propriedades. Para efeitos do cálculo integral que vamos desenvolver, as curvas são os elementos fundamentais. No entanto, são os caminhos que as parametrizam que permitem o cálculo desses integrais, como nos exemplos acima. Tal como sucede com a noção comprimento, veremos que os integrais são independentes da parametrização: dependem apenas das curvas e não dos caminhos particulares usados para as parametrizar. Dessa forma, frequentemente abusaremos terminologia e identificaremos um caminho com a respectiva curva.

DEFINIÇÃO 6.17. Um caminho (ou a respectiva curva) diz-se fechado se os seus extremos coincidem. O caminho inverso a um dado caminho $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$, é o caminho $\tilde{\gamma}:[-b,-a]\to\mathbb{C}$ definido por $\tilde{\gamma}(t) := \gamma(-t)$, pelo que ambos definem a mesma imagem, mas percorrida em sentido contrário. Assim, os extremos são trocados: o ponto inicial de $\tilde{\gamma}$ é o ponto final de γ e vice-versa.

OBSERVAÇÃO 6.18. Os extremos fazem parte da definição de curva Γ, mesmo que por vezes não sejam explicitamente referidos. Assim, se γ e $\tilde{\gamma}$ são caminhos inversos, de acordo com a nossa definição, as curvas $\Gamma = \mathrm{im}\gamma$ e $\tilde{\Gamma} = \mathrm{im}\tilde{\gamma}$ são chamadas curvas inversas, e são curvas distintas apesar de definirem o mesmo subconjunto de $\mathbb{C}$.

DEFINIÇÃO 6.19. Dado um caminho $\gamma:[a,b]\to\Omega$ e uma função contínua $f:\Gamma\to\mathbb{C}$ (sendo $\Gamma = (\gamma)$) definimos o integral de f ao longo de γ (ou integral de f em γ) como

$$\int_\gamma f := \int_a^b f(\gamma(t))\ \gamma'(t)\ dt.$$

Por vezes, e de modo a recordar os termos envolvidos nesta definição, escrevemos também $\int_\gamma f(z)dz$ em lugar de $\int_\gamma f$.

Observação 6.20. Uma vez que $\gamma'(t)$ existe excepto num número finito de pontos no intervalo compacto $[a,b]$, novamente não precisamos aqui da teoria do integral de Lebesgue (ver também a observação 6.3). Desta forma, este integral define-se como limite das chamadas somas de Riemann, que existe neste caso (ver Apêndice).

Algumas operações em curvas são especialmente relevantes. Para facilitar introduzimos a notação $\Gamma : z \mapsto w$ para denotar uma curva entre z e w.

Definição 6.21. Sejam z_0, z_1 e z_2 três pontos em $\mathbb{C}$. A concatenação das curvas $\Gamma_1 : z_0 \mapsto z_1$ e $\Gamma_2 : z_1 \mapsto z_2$, denotada por $\Gamma_1 * \Gamma_2$ é a curva obtida percorrendo primeiro Γ_1 e depois Γ_2. Sendo $\Gamma_i := \mathrm{im}\gamma_i$ com $\gamma_i : [0,1] \to \mathbb{C}$ vemos que a função $\gamma := \gamma_1 * \gamma_2$ definida por

$$(\gamma_1 * \gamma_2)(t) := \begin{cases} \gamma_1(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma_2(2t-1), & t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

é um caminho que parametriza $\Gamma_1 * \Gamma_2$.

Exercício 6.22. Verifique a última afirmação acima.

Observação 6.23. Note-se que a concatenação não está definida para curvas arbitrárias! Apenas está definida quando o ponto final de uma curva coincide com o ponto inicial da outra.

Definição 6.24. Uma curva poligonal é a concatenação de um conjunto finito de segmentos de recta.

Muitos exemplos importantes de curvas são as fronteiras de certas regiões do plano. É fácil arranjar exemplos de regiões cuja fronteira é de tal forma complicada que não pode ser uma curva (não ser imagem de uma função seccionalmente regular ou rectificável).

Exercício 6.25. Se P é um polígono convexo, mostre que a sua fronteira é uma curva fechada e simples.

O seguinte resultado sintetiza as propriedades fundamentais que gozam os integrais que definimos. Estas são de tal forma comuns que a sua utilização em vários cálculos não é tipicamente referida explicitamente, de modo a não sobrecarregar os textos.

Teorema 6.26. *Sejam $\gamma, \eta : [a,b] \to \Omega$ caminhos e $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ funções contínuas. Os integrais verificam as seguintes propriedades:*

(i) [Linearidade na função integranda] Sejam $a, b \in \mathbb{C}$ (constantes). Então

$$\int_\gamma (af + bg) = a\int_\gamma f + b\int_\gamma g.$$

(ii) [Aditividade na concatenação de curvas] Se γ termina onde η começa, então:

$$\int_{\gamma * \eta} f = \int_\gamma f + \int_\eta g.$$

(iii) [Troca de sinal] Se γ e η são caminhos inversos, então

$$\int_\gamma f = -\int_\eta f$$

(iv) [Majoração típica] Sendo $\Gamma = im\gamma$, temos

$$\left| \int_\gamma f \right| \leq C(\Gamma) \max_{z \in \Gamma} |f(z)|.$$

(v) [Independência da parametrização] Se γ e η parametrizam a mesma curva Γ, então

$$\int_\gamma f = \int_\eta f.$$

Demonstração. ... □

Observação 6.27. Uma vez que o integral não depende da parametrização, mas apenas da curva Γ percorrida pelo caminho, é frequente referir-se a este integral como o *integral de f sobre* Γ, que é naturalmente, escrito na forma:

$$\int_\Gamma f, \quad ou \quad \int_\Gamma f(z)\,dz.$$

De facto, vamos efectivamente deixar de distinguir entre caminhos e curvas, a menos que tal seja estritamente necessário para a compreensão do assunto em causa.

A tarefa de parametrizar uma curva arbitrária não é simples. Normalmente, usam-se apenas curvas e caminhos dados por funções bem conhecidas. No entanto, poderíamos perguntar como se calcula, na prática um integral de uma função contínua arbitrária $f(z)$ ao longo de uma curva arbitrária Γ? Naturalmente, falamos aqui de aproximar o resultado de forma tão precisa quanto pretendido.

Uma das abordagens a esta questão consiste em considerar uma classe relativamente simples, mas suficientemente abrangente de curvas, e usá-las para aproximar a curva pretendida, o que conduzirá, por sua vez, a uma aproximação ao integral. Uma tal classe é o conjunto das curvas poligonais.

Teorema 6.28. *Seja $\varepsilon > 0$ e $f(z)$ uma função contínua na região Ω. Dada uma curva arbitrária $\Gamma \subset \Omega$, existe uma curva poligonal $\Lambda \subset \Omega$ tal que:*

$$\left| \int_\Gamma f(z)\,dz - \int_\Lambda f(z)\,dz \right| < \varepsilon.$$

Demonstração. Usa-se o facto de que uma função contínua num compacto é limitada e integrável, pelo que o integral pode ser aproximado por "somas de Riemann", onde os valores da função são calculados num número finito de pontos $\gamma(t_i)$ (sendo $\gamma : [a,b] \to \Omega$ com $\Gamma = (\gamma)$ e $t_i \in [a,b]$) que se unem por segmentos de recta, determinando, assim, a curva poligonal Λ que aproxima Γ. □

6.2. O teorema fundamental do cálculo

Tal como no cálculo para funções de variável real, o teorema fundamental do cálculo para funções complexas diz-nos essencialmente que a integração e a derivação são operações inversas.

Por outro lado, ao contrário do integral real

$$\int_a^b f(t)\,dt,$$

em que existe essencialmente um único "caminho" entre $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$ (na perspectiva complexa, é o caminho "identidade": $\gamma(t) = t$ com $t \in [a,b]$), um integral entre dois pontos no plano complexo z_0 e z_1 depende da curva em questão (embora não dos vários caminhos para a mesma curva, como vimos no teorema 6.26(5)).

No entanto, de forma notável (uma vez mais!) *quando as funções integrandas são holomorfas* o integral depende "essencialmente" apenas dos extremos da curva e *não da curva*!! Nesta secção examinamos esta propriedade fundamental dos integrais complexos e também motivaremos a ideia que torna precisa o adjectivo "essencialmente" na frase anterior.

A prineira versão to Teorema Fundamental do Cálculo (TFC), que também pode ser chamada a *"Regra de Barrow"* determina o integral de uma derivada.

Teorema 6.29. *[Regra de Barrow ou TFC1] Seja $F \in H(\Omega)$. Então, para qualquer curva $\gamma : [a,b] \to \Omega$, temos:*

$$\int_\gamma F'(z)\ dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Demonstração. Usamos essencialmente o teorema fundamental do cálculo para funções de uma variável real. Note-se que $F'(z)dz = F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt$. □

A regra de Barrow é normalmente usada na seguinte forma. Note-se que um caso particularmente útil é quando queremos calcular integrais ao longo de curvas fechadas.

Corolário 6.30. *Seja $f(z)$ uma função primitivável na região Ω, com primitiva $F(z)$ e seja γ uma curva, em Ω, com início em z_0 e fim em z_1. Então:*
(i) O integral $\int_\gamma f$ não depende do caminho entre z_0 e z_1 . De facto:

$$\int_{\tilde{\gamma}} f(z)\,dz = F(z_1) - F(z_0),$$

para qualquer outra curva $\tilde{\gamma}$ com os mesmos extremos de γ.
(ii) Se γ é curva fechada ($z_0 = z_1$), então:

$$\oint_\gamma f = 0.$$

Demonstração. Para provar (ii) usamos directamente o TFC1, com $F' = f$ e com $z_1 = z_0$:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma F'(z)\,dz = F(z_0) - F(z_0) = 0.$$

Para mostrar (i) basta verificar que, sendo $\tilde{\gamma}$ uma curva com os mesmos extremos que γ, então a concatenação $\tilde{\gamma} * \gamma^{-1}$ é uma curva fechada (começando e terminando em z_0) pelo que, usando a propriedade aditiva dos integrais (e a da troca de sinal):

$$\int_{\tilde{\gamma}} f(z)\,dz - \int_\gamma f(z)\,dz = 0,$$

o que prova a independência do percurso. A fórmula indicada é imediata a partir do TFC1. □

Observação 6.31. Como consequência do teorema de Taylor, vemos que se f é primitivável em Ω, então é diferenciável (e analítica) em Ω. De seguida, veremos que o recíproco também é válido, mas apenas localmente.

Exercício 6.32. Seja $f = f(z)$ uma função primitivável em Ω. Mostre que quaisquer duas primitivas de f, denotadas por F_1 e F_2, por exemplo, diferem por uma constante aditiva. O mesmo resultado é válido para uma função contínua f definida numa união $\Omega_1 \cup \Omega_2$ de duas regiões?

Como é bem sabido do cálculo para funções reais, achar uma primitiva para uma função dada, nem sempre é um problema fácil, e nem sempre a resposta pode ser dada em termos de funções bem conhecidas da análise real ou complexa[1]. Por isso, é útil dispor de critérios para determinar quando é que uma função é primitivável. O Corolário 6.30 fornece-nos uma condição necessária: se f é primitivável em Ω, então ao longo de qualquer curva fechada o integral de f é nulo.

Veremos agora que esta condição é também suficiente! Comecemos por verificar que qualquer função contínua cujos integrais em curvas fechadas suficientemente pequenas se anulam, é uma função primitivável.

Se $T \subset \mathbb{C}$ é um triângulo fechado designamos por ∂T a curva que define a sua fronteira, percorrida no sentido directo. Note-se que T é o fecho de uma região, e portanto é um objecto bidimensional, enquanto que ∂T é uma curva: a concatenação de 3 segmentos de recta.

Teorema 6.33. *Seja D um disco e $f(z)$ contínua em D. Se $\oint_{\partial T} f(z)\,dz = 0$ para todo o triângulo fechado $T \subset D$, então f é primitivável em D.*

Demonstração. Fixemos $z_0 \in D$ e defina-se:

$$F(z) := \int_{[z_0,z]} f(z)\,dz,$$

onde $[z_0, z]$ é o segmento de recta com início em z_0 e fim em $z \in D$. Assim, calculamos, para $h \in \mathbb{C}$,

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h}\int_{[z,z+h]} f(w)\,dw.$$

Temos, então, a estimativa

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z)\right| &= \left|\frac{1}{h}\int_{[z,z+h]} [f(w) - f(z)]\,dw\right| \\ &\leq \frac{1}{|h|}|h| \max_{w\in[z,z+h]} |f(w) - f(z)|.\end{aligned}$$

Fazendo $h \to 0$, vemos que existe o limite

$$F'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h},$$

[1] Note-se, no entanto, que em discos a propriedade de ser diferenciável equivale à de ser primitivável, veja-se o Problema ...

e que iguala $f(z)$. Isto mostra que $F \in H(D)$ e $F'(z) = f(z)$, para qualquer $z \in D$, pelo que f é primitivável em D. $\square$

A condição de anulação do integral ao longo de curvas triangulares pode não parecer muito natural, mas é fácil ver que ela implica a anulação dos integrais ao longo de quaisquer curvas, num dado disco.

EXERCÍCIO 6.34. Seja D um disco. Mostre que se $f \in C(D)$ é tal que $\oint_{\partial T} f(z)\,dz = 0$ para qualquer triângulo $T \subset D$ então, $\oint_\Gamma f = 0$, para qualquer curva fechada $\Gamma \subset D$. Podemos concluir o mesmo substituindo D por uma qualquer região Ω?

O teorema anterior dá-nos uma condição local para a existência de uma primitiva. Vamos agora provar que a anulação de todos os integrais ao longo de curvas fechadas implica a existência de primitiva global, ou seja, implica que f seja primitivável em toda a região. É importante notar que precisamos, pois, de uma técnica de passar de uma propriedade local para uma propriedade global e que para isso, é importante que a região Ω seja conexa.

TEOREMA 6.35. *[Teorema Fundamental do Cáclulo, ou TFC2] Seja f contínua em Ω. As seguintes afirmações são equivalentes:*
(i) f é primitivável em Ω.
(ii) Sendo $\Gamma \subset \Omega$ uma curva, $\int_\Gamma f(z)\ dz$ só depende dos pontos inicial e final de Γ.
(iii) $\oint_\Gamma f(z)\ dz = 0$ para qualquer curva fechada Γ em Ω.
Pelo TFC1, em qualquer das condições acima podemos calcular o integral através de:
$$\int_\Gamma f = F(z_1) - F(z_0),$$
sendo Γ uma curva entre z_0 e z_1 e F uma qualquer primitiva de f.

DEMONSTRAÇÃO. A fórmula da frase final, bem como o facto de que (i) implica (ii) e (iii) não necessita de demonstração, pois segue directamente do TFC1 e do seu corolário. É também fácil verificar que (ii) implica (iii), pois a concatenação de duas curvas com os mesmos extremos, em que uma das duas é percorrida no sentido inverso, é uma curva fechada.

Finalmente, assumimos (iii) e escolhemos um ponto base $z_0 \in \Omega$. Podemos definir uma primitiva $F(z)$ de $f(z)$, escrevendo:
$$F(z) := \int_{z_0}^{z} f(w)\,dw,$$
onde $\int_{z_0}^{z}$ designa o integral ao longo de qualquer curva entre z_0 e z (existe, porque Ω é conexo). O facto de esta função estar bem deinida, ou seja, não depende da curva escolhida entre z_0 e z, é consequência da hipótese de todos os integrais em curvas fechadas se anularem. Assim, em qualquer disco $D \subset \Omega$ centrado em z, podemos fazer o cálculo de $F'(z)$ e obter $f(z)$, como na demonstração do Teorema 6.33. Portanto, existe uma primitiva $F(z)$ de $f(z)$ em toda a região Ω, donde (iii) implica (i). $\square$

Note-se que o Teorema 6.33 implica também uma condição suficiente para que uma função contínua seja holomorfa numa região.

COROLÁRIO 6.36. *[Teorema de Morera] Seja f contínua na região Ω e assumimos que para qualquer triângulo fechado $T \subset \Omega$, temos $\oint_{\partial T} f = 0$. Então $f \in H(\Omega)$.*

DEMONSTRAÇÃO. A condição diz-nos que f é primitivável em qualquer disco $D \subset \Omega$, pelo Teorema 6.33. Note-se, no entanto, que a condição não implica existência de primitiva global (ver o exercício ...) Como a existência de derivada é uma condição local, e qualquer primitiva *local* $F(z)$ é holomorfa, verificando $f(z) = F'(z)$ vemos que f é também holomorfa (com $f' = F''$em cada ponto), como consequência do Teorema de Taylor. $\square$

Os resultados acima motivam a seguinte questão: Sendo $f \in H(\Omega)$ é sempre verdade que $f(z)$ tem primitiva em Ω? A resposta é não, em geral!

EXEMPLO 6.37. Novamente, consideremos a função $f(z) = \frac{1}{z}$. Como sabemos, $f \in H(\mathbb{C}^*)$, mas esta função não é primitivável em $\Omega = \mathbb{C}^*$. Há pelo menos duas formas de ver isto: se existisse primitiva, ela seria dada, localmente, pela função $F(z) = \log(z)$, no entanto, como sabemos, esta função não é contínua em Ω. Outra forma de verificar esta situação é através do cálculo:
$$\int_{|z|=1} \frac{1}{z} dz = 2\pi i \neq 0,$$

o que, usando o Teorema 6.35, mostra que $f(z)$ não admite primitiva em Ω. Por outro lado, não é muito difícil de ver que uma primitiva de $f(z)$ existe na região:

$$\Omega' = \{z = re^{i\theta} : r > 0,\ \theta \in]-\pi, \pi[\}$$

e outras regiões semelhantes. Por exemplo, $f(z)$ é primitivável em qualquer disco contido em $\mathbb{C}^*$.

EXERCÍCIO 6.38. Seja $f(z) = \frac{1}{z}$ definida no disco perfurado $\mathbb{D}^*$. Mostre que para todos os polígonos convexos (fechados) $P \subset \mathbb{D}^*$, $\oint_{\partial P} \frac{1}{z} dz = 0$. No entanto, f não é primitivável em $\mathbb{D}^*$. Como explica isto, tendo em conta os resultados 6.36 e 6.35?

6.3. O Teorema de Cauchy-Goursat

Nesta secção, abordamos o Teorema de Cauchy-Goursat que nos fornece um critério, segundo o qual dada uma função $f(z)$ holomorfa numa região Ω, e uma curva fechada Γ, quando é que temos $\oint_\Gamma f(z)\, dz = 0$.

A versão do teorema de Cauchy que aqui mostramos baseia-se numa noção de homotopia menos comum, mas que é equivalente à usual. Sendo a nossa abordagem bastante intuitiva, o estudo da equivalência com a noção usual é deixado para o capítulo 8, devido às outras questões topológicas que lá abordaremos.

Um primeiro caso, o do disco, foi já abordado. De facto, qualquer função holomorfa num disco é primitivável, pelo que o seguinte é válido.

PROPOSIÇÃO 6.39. *Seja D um disco e $f \in H(D)$. Então $\oint_\Gamma f = 0$ para qualquer curva fechada $\Gamma \subset D$.*

DEMONSTRAÇÃO. A Proposição 4.30 diz-nos que f é primitivável em D. O TFC2 diz-nos que todos os integrais em curvas fechadas se anulam. □

Este resultado é claramente falso para regiões mais gerais. De facto, o Exemplo 6.37 mostra que no plano perfurado $\mathbb{C}^*$há integrais não nulos na circunferência unitário, mesmo para funções holomorfas em $\mathbb{C}^*$. Numa região geral, a anulação dos integrais em curvas fechadas *depende da curva*. De modo a estudar o que se passa, começamos por definir *curvas próximas numa região.*

DEFINIÇÃO 6.40. Sejam $\gamma, \tilde{\gamma} : [a, b] \to \Omega$ dois caminhos em Ω (definidos no mesmo intervalo). Dizemos que as respectivas curvas, Γ e $\tilde{\Gamma}$, são **próximas em** Ω, se existe uma partição do intervalo

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b,$$

e discos $D_1, \cdots, D_n$ contidos em Ω tais que $\gamma([t_{i-1}, t_i]) \cup \tilde{\gamma}([t_{i-1}, t_i]) \subset D_i$ para todo o $i = 1, \cdots, n$.

Intuitivamente, se duas curvas são próximas em Ω, podemos mover uma delas ligeiramente (dependendo do tamanho dos discos qe contém as curvas e estão contidos em Ω) até obter à outra. O estudo da secção anterior permite-nos, desde já, mostrar que se duas curvas são próximas, então dão o mesmo integral.

TEOREMA 6.41. *[Teorema das curvas próximas] Sejam γ e $\tilde{\gamma}$ curvas próximas em Ω e $f \in H(\Omega)$. Então:*

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\tilde{\gamma}} f(z)dz.$$

DEMONSTRAÇÃO. Em cada disco $D \subset \Omega$, o integral é zero ao longo de curvas fechadas, aplicando o Teorema.... O resultado segue-se de aplicar este facto aos vários discos que interpolam entre γ e γ'. □

DEFINIÇÃO 6.42. Sejam Γ e $\tilde{\Gamma}$ duas curvas numa região Ω. Dizemos que Γ e $\tilde{\Gamma}$ são **homotópicas em** Ω se existe uma sucessão finita de curvas $\Gamma_0 = \Gamma, \Gamma_1, \cdots, \Gamma_n = \tilde{\Gamma}$ tal que Γ_{i-1} é próxima de Γ_i para todo o $i = 1, \cdots, n$. Diz-se que Γ é **homotopicamente trivial em** Ω, se Γ é homotópica a uma curva toda contida num disco em Ω.

TEOREMA 6.43. *[Teorema de Cauchy-Goursat] Seja Ω uma região e $f(z) \in H(\Omega)$.*
(1) Sejam Γ e $\tilde{\Gamma}$ duas curvas homotópicas em Ω. Então:

$$\int_\Gamma f = \int_{\tilde{\Gamma}} f.$$

(2) Seja Γ uma curva fechada homotopicamente trivial em Ω. Então

$$\int_\Gamma f = 0.$$

Demonstração. (1) Basta usar o teorema das curvas próximas para passar de Γ_{i-1} para Γ_i, para todo o i entre 1 e n.
(2) Se Γ é homotopicamente trivial, então podemos reduzir o integral a uma curva num disco, onde qualquer função holomorfa (como é o caso de f) é primitivável e o resultado segue do TFC2. □

Para aplicações do cálculo integral convém, por vezes, considerar funções holomorfas em conjuntos fechados.

Definição 6.44. Seja $Q \subset \mathbb{C}$ um conjunto fechado. Dizemos que f é holomorfa em Q se existe uma região Ω, que contém Q, onde podemos definir f (mais precisamente, uma extensão de f) de forma a que $f \in H(\Omega)$.

O seguinte resultado é essencialmente um recíproco do teorema de Morera.

Corolário 6.45. *[Goursat] Seja f holomorfa num polígono convexo (fechado) P. Então $\int_{\partial P} f(z)\,dz = 0$.*

Demonstração. Como P é convexo e f é holomorfa numa vizinhança Ω de P, que também pode ser considerada convexa, ∂P é homotópica a uma curva num disco $D \subset \Omega$, pelo que se aplica o teorema de Cauchy. □

6.4. O Teorema dos resíduos para regiões convexas

Quando uma função tem apenas um número finito de singularidades isoladas, podemos encontrar o valor dos integrais ao longo de fronteiras de regiões convexas. Para o cálculo destes integrais contam apenas as singularidades nessa região convexa.

Teorema 6.46. *[dos resíduos] Seja γ a fronteira de uma região convexa Q. Se f é uma função holomorfa em $\overline{Q}$, à excepção de um número finito de singularidades isoladas $z_1, ..., z_n$ em Q, então:*

$$\oint_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathsf{Res}(f, z_k).$$

Demonstração. O integral é percorrido uma vez no sentido directo. Seja z_0 um ponto na curva γ com a seguinte propriedade: os segmentos de recta entre z_0 e cada z_i não se intersectam. Neste caso a curva γ é homotópica à curva Γ obtida concatenando pequenas circunferências $C_1, \cdots, C_n$ em torno de cada uma das singularidades. Seja

$$f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_j}{(z-z_1)^j} + \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z-z_1)^j$$

a série de Laurent de f em torno de z_1, válida num disco D_1 que contém C_1 (reduzindo o raio de C_1 se necessário). Então, pela continuidade uniforme (troca do integral com o somatório) e pelo facto de todos os termos serem primitiváveis no disco perfurado D_1^*, excepto $b_1/(z-z_1)$:

$$\begin{aligned}
\oint_{C_1} f &= \oint_{C_1} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_j}{(z-z_1)^j} + \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z-z_1)^j \right) dz = \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \oint_{C_1} \frac{b_j}{(z-z_1)^j} dz + \sum_{j=0}^{\infty} \oint_{C_1} a_j (z-z_1)^j dz = \\
&= \oint_{C_1} \frac{b_1}{z-z_1} dz + 0 = \\
&= 2\pi i b_1.
\end{aligned}$$

Finalmente, como $b_1 = \mathsf{Res}(f, z_1)$, o resultado segue-se fazendo o mesmo para cada uma das restantes singularidades: z_2 a z_n. □

Como veremos adiante, este teorema é bastante mais geral, aplicando-se a curvas que não são necessariamente fronteiras de regiões convexas. Para lidar com um tipo mais geral de curvas, torna-se necessário perceber que tipo de regiões podemos obter como *complemento* de uma dada curva. Isso leva-nos à noção de índice de uma curva em torno de um ponto, o que, por sua vez é a base de um novo conceito: o de homologia. Tratamos destas noções, bem como dos teoremas *globais* de Cauchy e dos resíduos no próximo capítulo.

6.5. Problemas

6.1 Calcule os seguintes integrais:
  (a) $\int_{[0,1+i]} z\, dz$
  (b) $\int_{[0,1+i]} |z|\, dz$
  (c) $\int_{[0,1+i]} \bar{z}\, dz$.

6.2 Mostre que, dos integrais do Problema 1, apenas o integral (a) é independente da curva.

6.3 Calcule $\int_1^{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i} \frac{1}{z}\, dz$, onde a curva que une os extremos está contida no primeiro quadrante.

6.4 Seja D um disco. Mostre que $f \in H(D)$ se e só se f é primitivável em D.

6.5 Seja $D^* = \mathbb{D}(0,1)$ o disco perfurado unitário. Mostre que, $\oint_{\partial P} \frac{1}{z} dz = 0$, para todo polígono $P \subset D^*$. Podemos concluir que $f(z) = \frac{1}{z}$ é primitivável em D^*?

6.6 Calcule:
$$\oint_{|z|=2} \frac{e^{\frac{\pi}{2}iz}}{(z-1)(z-3)}\, dz.$$

6.7 Suponha que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de funções holomorfas definidas numa região Ω, convergindo uniformemente para f, e γ é uma curva em D. Prove que $\int_\gamma f_n(z)dz$ converge para $\int_\gamma f(z)dz$.

CAPíTULO 7

Integração, homologia e dualidade

Neste segundo capítulo sobre integração no plano, vamos provar uma nova versão do teorema de Cauchy. Esta versão costuma chamar-se "global", mas deveria talvez designar-se a *versão homológica*, uma vez que se baseia numa simplificação do conceito de homologia, que é um invariante topológico associado a uma dada região do plano.

7.1. Motivação para o Teorema de Cauchy "global"

A regra de Barrow assegura que, sendo f primitivável numa região $\Omega \subset \mathbb{C}$, o integral de f ao longo de qualquer curva fechada é zero. O recíproco também é válido, pelo *Teorema fundamental do cálculo para curvas fechadas* (TFC2):

TEOREMA 7.1. *[Recordar o teorema 6.35] Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ uma região e $f \in H(\Omega)$. Então $\oint_\gamma f = 0$ para toda curva fechada γ contida em Ω se e só se f é primitivável.*

DEMONSTRAÇÃO. Isto é meramente uma reformulação do Teorema 6.35. De facto, como as funções holomorfas são contínuas, temos a equivalência entre as condições (i) e (iii) do teorema citado. □

Este resultado diz-nos que a propriedade de ser primitivável numa região é a condição necessária e suficiente para garantir a anulação dos integrais ao longo de qualquer curva fechada nessa região.

O teorema de Cauchy "global", que veremos de seguida, pretende responder a uma questão relacionada, mas colocando-a noutra perspectiva. Supomos que, além da região Ω, fixamos uma curva fechada γ em Ω. Queremos saber que propriedades deve ter γ de forma a que $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$ para qualquer $f \in H(\Omega)$.

OBSERVAÇÃO 7.2. Seja Ω uma região fixa. Qual é a propriedade (topológica) que uma curva fechada $\gamma \subset \Omega$ deve ter que é simultaneamente necessária e suficiente para garantir $\int_\gamma f = 0$ para todo f holomorfo em Ω?

Um primeiro passo para responder a esta questão é dada pelo teorema de Cauchy clássico:

TEOREMA 7.3. *(De Cauchy clássico) Se γ é homotópico a um ponto em Ω, então $\int_\gamma f = 0$ para todo $f \in H(\Omega)$.*

No entanto há curvas γ não homotopicamente triviais numa certa região Ω, com a mesma propriedade.

EXEMPLO 7.4. Seja $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2\}$ e γ a seguinte curva: ... Então $\gamma \not\sim 1$, mas $\int_\gamma f = 0$ para todo $f \in H(\Omega)$!!

Poincaré foi o primeiro a considerar o conceito que fornece a tal condição necessária e suficiente, bem como a entender as semelhanças e diferenças entre este conceito, o de "homologia", e o conceito de deformação, subjacente à "homotopia".

Para aplicação à análise complexa a uma variável, faremos uma abordagem muito simplificada à teoria da homologia, recorrendo essencialmente à noção de índice de uma curva fechada em torno de um ponto.

7.2. Índice de uma curva fechada em torno de um ponto

Recordemos que

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C(z_0,r)} \frac{dz}{z - z_0} = 1,$$

sendo $C(z_0, r)$ a circunferência centrada em z_0 de raio $r > 0$, percorrida uma vez no sentido directo. Isto motiva a seguinte definição.

Definição 7.5. O índice de um caminho fechado $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ em relação a um ponto $z_0 \notin \{\gamma\}$ é o número complexo:

$$I(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0}.$$

Exemplo 7.6. Se $\gamma(t) = e^{2\pi i t}, \quad t \in [0,1]$ e $z_0 = 0$, temos:

$$I(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z} = 1.$$

Mais geralmente, sendo $\gamma(t) = e^{2\pi i n t}, \quad t \in [0,1]$ com $n \in \mathbb{Z}$ e $z_0 = 0$, teremos:

$$I(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{2\pi i n e^{2\pi i n t} dt}{e^{2\pi i n t}} = n.$$

2) Se $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ e $z_0 = 2$, temos:

$$I(\gamma, 2) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - 2} = 0,$$

pelo teorema de Cauchy para regiões convexas.

Tal como sugerido nestes exemplos o índice de γ em torno de z_0 será, em geral, o que podemos descrever geometricamente como o "número de voltas que γ dá em torno de z_0 no sentido positivo". Isto ficará mais claro quando introduzirmos a noção de grau, que pretende dar um significado preciso a este "número de voltas", e quando provarmos que a noção de grau coincide com a de índice, no capítulo 3 (prop.3.29). Para já provemos algumas propriedades simples do índice.

Uma curva fechada é um conjunto compacto de $\mathbb{C}$, pois é a imagem de um intervalo compacto de $\mathbb{R}$ por uma função contínua. Assim, o complementar dessa curva $\mathbb{C} \setminus \{\gamma\}$ é aberto e assim, as suas componentas conexas são conexas por arcos.

Proposição 7.7. *Existe uma e somente uma componente ilimitada de $\mathbb{C} \setminus \{\gamma\}$ e é caracterizada por ser a componente que contém os pontos do complementar de um disco que contém $\{\gamma\}$.*

Demonstração. Se z_1 está numa componente ilimitada e a curva γ está contida no disco $\mathbb{D}(0, R)$, então podemos encontrar um caminho γ_1 que não intersecta γ que une z_1 a um qualquer ponto w fora de $\mathbb{D}(0, R)$. Assim, se z_2 estiver também numa componente ilimitada, podemos, compondo dois destes caminhos, unir z_1 a z_2, o que mostra que só há uma componente conexa ilimitada de $\mathbb{C} \setminus \{\gamma\}$. □

Proposição 7.8. *Seja $f(z) = I(\gamma, z)$ onde γ é uma curva fechada, e $f : \mathbb{C} \setminus \{\gamma\} \to \mathbb{C}$. Então:*
(1) $f(z)$ é um número inteiro $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{\gamma\}$.
(2) $f \in H(\mathbb{C} \setminus \{\gamma\})$.
(3) f é constante em cada componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \{\gamma\}$.
(4) $f(z) = 0$ na componente ilimitada de $\mathbb{C} \setminus \{\gamma\}$.

Demonstração. (1) Considere-se a função $\varphi(t) = exp\left(\int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z} ds\right)$, de modo a que $\varphi(0) = 1$ e $\varphi(1) = e^{2\pi i I(\gamma,z)}$. A função $g(t) := \frac{\varphi(t)}{\gamma(t)-z}$ é contínua (pois $z \notin \{\gamma\}$) e a sua derivada é $g'(t) = \frac{\varphi'(t)(\gamma(t)-z)-\gamma'(t)\varphi(t)}{(\gamma(t)-z)^2} = = 0$ pois $\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = \frac{d}{dt} \log \varphi(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}$. Assim $g'(t) = 0$ em todos os pontos $t \in [a, b]$ tais que $\gamma'(t)$ existe. Como este conjunto de t's é denso temos que g é constante. Assim, $\frac{\varphi(1)}{\gamma(1)-z} = \frac{\varphi(0)}{\gamma(0)-z}$ e como $\gamma(1) = \gamma(0)$ concluimos que $\varphi(1) = \varphi(0)$ que equivale a $\exp(2\pi i I(\gamma, z)) = 1$. Assim $I(\gamma, z) \in \mathbb{Z}$.

(2) $\frac{I(\gamma,z)-I(\gamma,z_0)}{z-z_0} = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z-z_0} \int_\gamma \left(\frac{1}{w-z} - \frac{1}{w-z_0}\right) dw = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{(w-z)(w-z_0)} dw$ logo $f'(z_0)$ existe e é igual a $\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{(w-z_0)^2} dw$.

(3) Como $\frac{1}{(w-z_0)^2}$ tem uma primitiva $\left(-\frac{1}{w-z_0}\right)$ em $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ e $\{\gamma\} \subset \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ é uma curva fechada, temos $f'(z_0) = 0 \; \forall z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{\gamma\}$, pelo resultado 2) e pelo teorema fundamental do cálculo.

(4) Se $w \in \{\gamma\}$, $\lim_{z \to \infty} |w - z| = \infty$, assim (fazendo o limite na componente ilimitada)

$$|I(\gamma, z)| = \left|\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dw}{w - z}\right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \left|\frac{1}{w - z}\right| |dw| \leq \frac{1}{2\pi} C(\gamma) \cdot \max_{w \in \gamma} \frac{1}{|w - z|} < \frac{1}{2}$$

para $|w-z|$ suficientemente grande. Logo como o índice é inteiro, $I(\gamma, z)=0$ se z está na componente ilimitada. $\square$

O teorema dos resíduos diz-nos que, para calcularmos um integral ao longo de uma curva fechada e simples, devemos tomar em conta as singularidades da função integranda na componente interior dessa curva. A noção de componente interior é clara para curvas que são a fronteira de regiões convexas, mas torna-se evidente a necessidade de uma definição rigorosa deste conceito para curvas mais complicadas. Dito de outra forma, dada uma região Ω em $\mathbb{C}$, onde uma dada função $f(z)$ é holomorfa, interessa definir rigorosamente, quando é que uma curva encerra uma ou mais sigularidades de $f(z)$, que são pontos no complementar de Ω. De acordo com a proposição e os exemplos anteriores, uma curva γ "encerra" um ponto w no complemento de Ω se e só se $I(\gamma, w) \neq 0$. Assim, justifica-se o seguinte conceito que será bastante útil para simplificar o enunciado e compreensão dos resultados que apresentaremos neste capítulo.

Definição 7.9. Dizemos que γ é homóloga a zero em Ω, e escrevemos $\gamma \approx 0$, se $I(\gamma, w)=0$ para todo $w \notin \Omega$.

De acordo com a argumentação acima, uma curva γ é homóloga a zero em Ω se não "encerra buracos", i.e pontos que não estão em Ω. Podemos desde já observar a seguinte relação entre curvas que se deformam a um ponto (homotopicamente triviais) e curvas que "encerram" uma região bidimensional (homologicamente triviais).

Proposição 7.10. *Se γ é uma curva fechada homotópica a um ponto em Ω, então $\gamma \approx 0$ em Ω (isto é $I(\gamma, w)=0$ para todo $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$).*

7.3. Teorema de Cauchy global

Começamos pela parte mais fácil.

Proposição 7.11. *Seja Ω uma região em $\mathbb{C}$ e γ uma curva em Ω. Se $\int_\gamma f(z)\, dz=0$ para toda a função $f \in H(\Omega)$ então $\gamma \approx_\Omega 0$.*

Demonstração. Fixemos Ω e γ como indicado. Vamos supor que existe $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ tal que $I(\gamma, w) \neq 0$. Por definição, isto significa que

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-w} \neq 0.$$

Seja então $f(z)=\frac{1}{z-w}$. Como $w \notin \Omega$, vemos que $f \in H(\Omega)$. Logo, existe $f \in H(\Omega)$ cujo integral ao longo de γ não se anula. $\square$

O recíproco é também válido: o teorema de Cauchy global, que veremos mais adiante.

Teorema 7.12. *Seja Ω uma região.*

Comecemos por um facto intuitivo, mas cuja demonstração rigorosa se revela bastante difícil, o teorema da curva de Jordan.

Definição 7.13. Uma curva de Jordan é uma curva correspondente a um caminho fechado $\gamma: [a, b] \to \mathbb{C}$ que é simples, isto é, não tem auto intersecções excepto nos extremos. Mais precisamente, γ verifica a condição: se t_1 ou $t_2 \in]a, b[$ e $\gamma(t_1)=\gamma(t_2)$, então $t_1=t_2$.

Recordemos que $\{\gamma\} := \{\gamma(t) \in \mathbb{C} : \ t \in [a, b]\}$ designa a curva correspondente ao caminho $\gamma:[a, b] \to \mathbb{C}$.

Teorema 7.14. *(Teorema da curva de Jordan) Uma curva de Jordan divide o plano em duas componentes conexas. Mais precisamente, se γ é um caminho fechado e simples, então o complementar da sua imagem $\mathbb{C} \setminus \{\gamma\}$ é um aberto desconexo com exactamente duas componentes conexas, uma limitada, chamada a componente interior e a outra ilimitada, chamada a componente exterior.*

Observação 7.15. É fácil demonstrar que $\mathbb{C} \setminus \{\gamma\}$ é um aberto desconexo e que deve ter pelo menos duas componentes conexas, sendo apenas uma delas ilimitada. O difícil é, portanto, mostrar que há apenas uma componente interior. Deixamos a demonstração deste teorema para mais tarde.

7.4. Homotopia e Homologia

Uma das propriedades fundamentais do integral de funções holomorfas é a invariância por homotopia.

DEFINIÇÃO 7.16. Homotopia

EXEMPLO 7.17. ...

DEFINIÇÃO 7.18. Um conjunto é simplesmente conexo se contém a componente interior de qualquer curva de Jordan.

Podemos agora mostrar a equivalência da nossa definição de conjunto simplesmente conexo com a usual.

PROPOSIÇÃO 7.19. *Seja Ω uma região. Qualquer curva fechada é Ω-homotópica a um ponto $\gamma \sim_\Omega 1$ se e só se Ω contém a componente interior de qualquer curva de Jordan em Ω.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja γ de Jordan em Ω. Cobrir $\gamma \cup CI(\gamma) \subset \Omega$ com número finito de rectângulos. Este recticulado serve para fazer homotopia para um ponto. Se γ não é Jordan, faz-se o mesmo com todas as componentes interiores de γ. Para o recíproco, usamos a invariância por homotopia... $\square$

7.5. O Teorema de Cauchy Global

Anteriormente, vimos a fórmula integral de Cauchy:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Podemos perguntar se esta fórmula não será válida também para integrais ao longo de uma curva γ que se possa deformar na circunferência unitária. E será que esta fórmula pode ser generalizada para qualquer curva (que não contenha z_0)? A resposta é afirmativa e é dada pelo teorema seguinte:

TEOREMA 7.20. ***(Fórmula integral de Cauchy generalizada):*** *Se $f \in H(\Omega)$ e $\gamma \approx 0$ em Ω, então:*

$$I(\gamma, z_0) f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz \qquad \forall z_0 \in \Omega \setminus \{\gamma\}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Defina-se $\varphi : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ através de

$$\varphi(z, w) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(w)}{z-w} & z \neq w \\ f'(z) & z = w. \end{cases}$$

A função φ é analítica em z para cada $w \in \Omega$ fixo. Seja $H = \{w \in \mathbb{C} \setminus \{\gamma\} : I(\gamma, w) = 0\}$. H é aberto, porque as componentes conexas de $\mathbb{C} \setminus \{\gamma\}$ são abertas e $H \cup \Omega = \mathbb{C}$. Defina-se também:

$$g(z) = \begin{cases} \int_\gamma \varphi(z, w) dw & z \in \Omega \\ \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} dw & z \in H \end{cases}$$

g está bem definida, porque na interseção $z \in \Omega \cap H$ tem-se:

$$\begin{aligned} g(z) &= \int_\gamma \varphi(z, w) dw = \int_\gamma \frac{f(z)}{z-w} dw - \int_\gamma \frac{f(w)}{z-w} dw = -f(z) 2\pi i I(\gamma, z) - \int_\gamma \frac{f(w)}{z-w} dw = \\ &= -\int_\gamma \frac{f(w)}{z-w} dw = \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} dw \end{aligned}$$

Assim g é analítica em Ω e em H e portanto é analítica em $\mathbb{C}$! Como o ponto $\infty \in H$ (ver prop. 2.17) temos:

$$\left| \lim_{z\to\infty} g(z) \right| = \left| \lim_{z\to\infty} - \int_\gamma \frac{f(w)}{z - w} dw \right| \leq \lim_{z\to\infty} \int_\gamma \frac{|f(w)|}{|z - w|} |dw| = 0$$

porque $|z - w| > R$, $|f(w)| \leq M$, e o comprimento de γ é fixo e finito.

Assim, $g(z)$ é inteira e limitada, logo é constante pelo teorema de Liouville e pelo limite calculado $g(z) \equiv 0$. Portanto, para todo $z \in \Omega$

$$g(z) = -f(z) 2\pi i I(\gamma, z) + \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} dw = 0.$$

$\square$

Esta fórmula integral de Cauchy permite demonstrar o chamado Teorema de Cauchy global.

TEOREMA 7.21. ***(Teorema de Cauchy global)***. *Seja Ω uma região em $\mathbb{C}$ e γ uma curva fechada em Ω. Se $f \in H(\Omega)$ e $\gamma \approx 0$, então*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

DEMONSTRAÇÃO. Seja $z_0 \in \Omega$, e $F(z) = (z - z_0)f(z)$ então $F \in H(\Omega)$. Estamos nas hipóteses do teorema anterior, logo:

$$0 = F(z_0)I(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{F(z)}{z - z_0}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz.$$

□

Como corolário obtemos o teorema de Cauchy clássico.

TEOREMA 7.22. ***(Teorema de Cauchy clássico)***: *Se Ω é uma região em $\mathbb{C}$ e $f \in H(\Omega)$ e γ é uma linha fechada homotópica a um ponto em Ω, então*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

DEMONSTRAÇÃO. Basta aplicar a Proposição 7.10 e o Teorema de Cauchy global, Teorema 7.21.

□

Podemos agora resumir as ideias mais relevantes desta secção no seguinte enunciado.

TEOREMA 7.23. *Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ uma região fixa.*

(1) Seja $f \in H(\Omega)$. Então f é primitivável se e só se $\int_\gamma f(z)\ dz = 0$ para qualquer curva fechada $\gamma \subset \Omega$.

(2) Seja $\gamma \subset \Omega$ curva fechada. Então $\gamma \approx_\Omega 0$ se e só se $\int_\gamma f(z)\ dz = 0$ para qualquer função $f \in H(\Omega)$.

Vamos agora considerar o caso, muito útil na prática, de integrais de uma função holomorfa em todos os pontos de uma região Ω, com excepção de um número finito de pontos onde ela tem singularidades isoladas.

TEOREMA 7.24. *Seja Ω uma região em $\mathbb{C}$ e γ uma curva fechada homóloga a zero em Ω. Seja $f(z)$ uma função holomorfa em $\Omega^* := \Omega \setminus \{z_1, ..., z_n\}$ e $C_1, ..., C_n \subset \Omega$ pequenas circunferências disjuntas orientadas no sentido directo centradas em cada um dos pontos $z_1, ..., z_n$ (respectivamente). Então*

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} I(\gamma, z_k)\int_{C_k} f(z)dz. \tag{7.5.1}$$

Este teorema diz-nos que, para todos as funções holomorfas em Ω^*, podemos substituir integração ao longo de um caminho arbitrário pela integração ao longo de pequenas circunferências. Assim, este resultado é extremamente útil para reduzir problemas com curvas complexas a cálculos simples.

PROPOSIÇÃO 7.25. *Seja Ω uma região em $\mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$, e γ um caminho em $\Omega\setminus\{z_0\}$. Então, $I(\gamma, z_0) = 0$ se e só se γ é homotopicamente trivial em $\Omega\setminus\{z_0\}$.*

7.6. Princípio do argumento

Estamos agora interessados nos integrais de $f'(z)/f(z)$ onde f é uma função meromorfa. Estes integrais têm uma importante relação com o índice, a que se dá o nome de princípio do argumento.

Para uma função meromorfa $f(z)$, designamos por Z_f, respectivamente, por P_f, o conjunto dos zeros, respectivamente, pólos de f.

TEOREMA 7.26. *Seja $f(z)$ meromorfa em Ω. Então $g(z) := f'(z)/f(z)$ também é meromorfa em Ω. Além disso, todos os pólos de g são simples, e*

$$Res(g, z_0) = ord_{z_0}(f),$$

para qualquer $z_0 \in Z_f \cup P_f$.

DEMONSTRAÇÃO. Usa-se a série de Laurent. □

TEOREMA 7.27. *[Princípio do argumento] Sendo $f \in M(\Omega)$ e γ curva fechada em Ω que não intersecta $Z_f \cup P_f$, temos:*

$$I(f \circ \gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{z_k \in Z_f \cup P_f} I(\gamma, z_k) ord_{z_k}(f).$$

DEMONSTRAÇÃO. A primeira igualdade vem da fórmula de mudança de variável. A segunda segue do teorema dos resíduos, aplicado a $g = f'/f$. □

7.7. Teorema de Rouché

Podemos agora provar um resultado clássico de análise complexa, o teorema de Rouché, que se pode considerar como um resultado puramente topológico.

TEOREMA 7.28. *(Teorema de Rouché, versão forte) Seja Ω um conjunto aberto em $\mathbb{C}, \gamma$ um caminho fechado em Ω e f, g duas funções contínuas em $\gamma([0,1])$ tais que*

$$|f(\gamma(t)) - g(\gamma(t))| < |f(\gamma(t))| + |g(\gamma(t))| \quad \forall t \in [0,1].$$

Então $f \circ \gamma$ e $g \circ \gamma$ são dois caminhos em $\mathbb{C}^*$ com o mesmo grau em torno de 0.

DEMONSTRAÇÃO. A desigualdade acima implica que nem f nem g se podem anular em $\gamma([0,1])$. Além disso, a função $\lambda(t) = f(\gamma(t)) / g(\gamma(t))$ toma valores em $\mathbb{C} \backslash]-\infty, 0]$. Isto porque $\lambda = 0$ é impossível, e se $\lambda < 0$ então a desigualdade do enunciado implica $1 + |\lambda| < 1 + |\lambda|$. Seja $H(t,s) = (1-s) + s\,\lambda(t)$. Isto é homotopia entre o caminho constante em 1, e o caminho λ. Assim $H'(t,s) = H(t,s)\, g(\gamma(t))$ é uma homotopia entre $f \circ \gamma$ e $g \circ \gamma$. O teorema segue da proposição 3.25. □

COROLÁRIO 7.29. *[Teorema de Rouché, versão clássica] Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ região e γ uma curva fechada em Ω. Se f, g são meromorfas em Ω, não possuem zeros nem pólos em $\{\gamma\}$ e*

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)|, \quad \forall z \in \{\gamma\},$$

então $I(f \circ \gamma, 0) = I(g \circ \gamma, 0)$.

Usando agora o princípio do argumento, temos então o seguinte resultado mais explícito sobre zeros e pólos.

COROLÁRIO 7.30. *[Teorema de Rouché para curvas de Jordan] Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ região e γ uma curva de Jordan em Ω. Se f, g são meromorfas em Ω, não possuem zeros nem pólos em $\{\gamma\}$ e*

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)|, \quad \forall z \in \{\gamma\},$$

então, na componente interior de γ temos:

$$NZ_f - NP_f = NZ_g - NP_g,$$

onde NZ e NP foi definido em ...

Um conjunto simplesmente conexo é um conjunto cujo grupo fundamental é trivial. Um resultado que agora podemos mostrar é que o logarítmo tem uma determinação única numa região simplesmente conexa.

PROPOSIÇÃO 7.31. *Se Ω é uma região simplesmente conexa em $\mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}^*$ é contínua, $z_0 \in \Omega, w_0 \in \mathbb{C}$ tais que $e^{w_0} = f(z_0)$,então existe uma única função contínua $g : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $g(z_0) = w_0$ e $e^{g(z)} = f(z) \Longleftrightarrow g(z) = \log f(z)$.*

7.8. Problemas

7.1 Seja $f \in H(\Omega)$ satisfazendo $|f(z) - 1| < 1$ para todo $z \in \Omega$. Prove que $\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$, para toda a curva fechada γ em Ω (não necessariamente homóloga a zero).

7.2 Seja $f(z) = (z - z_0)^m h(z)$ onde $h(z)$ é uma função holomorfa que não se anula numa região Ω, e γ um caminho homólogo a zero em Ω, tal que $z_0 \notin \{\gamma\}$. Mostre que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = mI(\gamma, z_0).$$

7.3 Seja γ uma curva de Jordan em Ω onde f é meromorfa e seja $g \in H(\Omega)$. Se $\{z_1, ..., z_n\}$ é o conjunto de zeros e pólos de f na componente interior de $\{\gamma\}$, deduza a fórmula:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} g(z)dz = \sum_{k=1}^{n} g(z_k) \operatorname{ord}_{z_k} f.$$

7.4 Seja Ω uma região em $\mathbb{C}$ e D um disco aberto cujo fecho está contido em Ω. Seja $f \in H(\Omega)$ não constante tal que $|f|$ é constante em ∂D. Mostre que f tem pelo menos um zero em D. (Sugestão: considere $g(z) = f(z) - f(z_0)$ com $z_0 \in D$).

7.5 Seja $p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$ e $R > 0$ um número real fixo. Prove que existe m tal que p_n não tem zeros no disco de raio R para todo $n \geq m$.

7.6 Seja γ uma curva de Jordan em Ω, e $f \in H(\Omega)$, com n zeros (contando multiplicidades) na componente interior de γ (e $f \neq 0$ on $\{\gamma\}$). Prove que para qualquer $g \in H(\Omega)$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $f + \varepsilon g$ também tem n zeros (contando multiplicidades) na componente interior de γ.

7.7 Considere a função inteira $f(z) = z^{n+1} - e^{\frac{1}{2}z-1}$, para $n \geq 1$ inteiro. Mostre que f tem $n+1$ zeros (contando multiplicidades) no anel $\left\{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < |z| < 1\right\}$ (observe que $e^{-\frac{5}{4}} > \frac{1}{4}$) e calcule o índice do caminho dado por $\gamma(t) = \frac{f(e^{it})}{e^{2it}}$, $t \in [0, 2\pi]$, em torno da origem.

CAPíTULO 8

Convergência e Representação de Funções Inteiras

Neste capítulo, vamos considerar mais uma generalização dos polinómios, e descrever uma classe de funções inteiras que admite um conjunto infinito de zeros mas com crescimento controlado no infinito.

Por exemplo, a função $f(z) = \sin z$, que é inteira, tem zeros apenas nos pontos $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, e gostaríamos de saber se admite uma factorização por "primos" da forma $(z - k\pi)$. Para responder a esta questão, temos primeiro que definir e estudar convergência de produtos infinitos. Veremos então que, por exemplo, não façam sentido os seguintes produtos

$$\prod_{n\in\mathbb{Z}}(z - n\pi) \qquad \text{ou} \qquad z \cdot \prod_{n\in\mathbb{N}}(z^2 - n^2\pi^2),$$

porque encontramos dificuldades com a respectiva convergência. Podemos, por outro lado, mostrar que é válido o seguinte desenvolvimento:

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n\in\mathbb{N}}(1 - \frac{z^2}{n^2}).$$

Esta fórmula, escrita pela primeira vez por Euler, para além da sua elegância, permitiu-lhe resolver um problema importante na época - o cálculo da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

8.1. Convergência em $H(\Omega)$

Recordemos a definição de convergência uniforme para funções contínuas. Vamos usar a *norma do máximo* em conjuntos compactos. Sendo $K \subset \mathbb{C}$ um compacto, definimos:

$$||f||_K = \max_{z\in K} |f(z)|.$$

Definição 8.1. Seja $f_n(z)$ uma sucessão de funções contínuas definidas no conjunto compacto K. Diz-se que $\{f_n\}$ converge uniformemente se existe uma função $f : \Omega \to \mathbb{C}$ que verifica o seguinte: para todo $\varepsilon > 0$ existe N tal que $||f_n - f||_K < \varepsilon$ para todo $n > N$. Neste caso, dizemos que o limite uniforme de f_n é f, e escrevemos $f = \lim_n f_n$.

Sabemos, pelo teorema da convergência uniforme (apêndice), que o limite uniforme de uma sucessão de funções contínuas num conjunto compacto K é uma função contínua em K. Quando as funções estão definidas em regiões *abertas* Ω, a convergência é definida para todos os subconjuntos compactos $K \subset \Omega$.

Definição 8.2. Seja Ω uma região em $\mathbb{C}$ e $\{f_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, uma sucessão de funções contínuas em Ω. Dizemos que $\{f_n\}$ *converge uniformemente em compactos* de Ω, se para todo subconjunto compacto $K \subset \Omega$, a convergência de $\{f_n\}$ em K é uniforme.

Desta forma, o limite uniforme (em compactos) de uma sucessão de funções contínuas numa região de $\mathbb{C}$ é uma função contínua nessa região.

Exemplo 8.3. Seja $f_n(x) = x^n$ uma sucessão de funções definidas no intervalo $[0, 1]$. O limite desta sucessão não é contínuo, e de facto a convergência não é uniforme em $[0, 1]$. No entanto, a restrição de f_n a qualquer subconjunto compacto de $]0, 1[$ tem um limite uniforme (a função nula nesse compacto). A situação é semelhante, se considerarmos a sucessão de funções $f_n(z) = z^n$ definidas em $\mathbb{D}$, ou seja: embora a convergência não seja uniforme no disco fechado $\overline{\mathbb{D}}$, existe limite uniforme (e portanto contínuo) - a função nula - para qualquer compacto $K \subset \mathbb{D}$.

Quando temos uma sucessão de funções em Ω que, além de contínuas são holomorfas, o limite uniforme será também ele holomorfo.

TEOREMA 8.4. *Se $\{f_n\}$ é uma sucessão em $H(\Omega)$ que converge uniformemente em conpactos e seja $f := \lim_n f_n$. Então f é holomorfa em Ω. Além disso, para cada $k \geq 1$, $f_n^{(k)}$ converge uniformemente para $f^{(k)}$.*

DEMONSTRAÇÃO. Vamos ver que a existência de primitivas locais de cada f_n implica o mesmo para o limite f, e usar o Teorema de Morera. O caso das derivadas de $f(z)$ deixa-se para o leitor.

Para qualquer fronteira γ de um triângulo $T \subset \Omega$, a convergência uniforme permite a troca do integral com o limite e obtemos:

$$\oint_\gamma f(z)\, dz = \oint_\gamma \lim_n f_n(z)\, dz = \lim_n \oint_\gamma f_n(z)\, dz = 0.$$

Assim, estamos nas condições do teorema de Morera (Corolário 6.36), pelo que $f \in H(\Omega)$. □

COROLÁRIO 8.5. *Seja $\{f_n\}$ uma sucessão de funções holomorfas em Ω, de forma que a série $\sum_{n=1}^\infty f_n(z)$ tem um limite uniforme $f(z)$. Então, para todo o $z \in \Omega$, e todo o $k \in \mathbb{N}$:*

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z).$$

8.2. A função básica de Eisenstein

Vamos agora mostrar que é válida a seguinte representação:

PROPOSIÇÃO 8.6. *A seguinte série*

$$\frac{1}{z} + \sum_{n=1} \frac{2z}{z^2 - n^2},$$

converge uniformemente em qualquer subconjunto compacto de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, definindo uma função meromorfa em $\mathbb{C}$ com pólos simples nos pontos de $\mathbb{Z}$ e com resíduos de valor 1.

DEMONSTRAÇÃO. Exercício. □

TEOREMA 8.7. *Para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ temos:*

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1} \frac{2z}{z^2 - n^2}.$$

DEMONSTRAÇÃO. ... □

8.3. Convergência de produtos infinitos de números complexos e de funções

Vamos agora definir convergência para um produto de números complexos não nulos.

DEFINIÇÃO 8.8. Seja $\{z_n\}$ uma sucessão de números complexos não nulos. Dizemos que $\prod_{n\in\mathbb{N}} z_n$ converge absolutamente se $\lim z_n = 1$ e se a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \log z_n$ converge absolutamente. Neste caso definimos

$$\prod_{n\in\mathbb{Z}} z_n = e^{\sum_{n\in\mathbb{N}} \log z_n}.$$

OBSERVAÇÃO 8.9. (1) Pela condição $\lim z_n = 1$, a sucessão ficará arbitráriamente próxima do valor limite, pelo que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|z_n - 1| < 1$ para todo o $n > N$. Assim, o logarítmo principal $\log z_n = \log |z_n| + i \arg z_n$ está bem definido para $n > N$, e podemos atribuir-lhe uma parte imaginária $\arg z_n \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
(2) Se um produto de números complexos $\prod_{n\in\mathbb{N}} z_n$ converge absolutamente, então qualquer reordenação de termos levará ao mesmo resultado. Isto segue do resultado análogo para séries absolutamente convergentes.

Para estimar a convergência de séries de logaritmos, consideremos o desenvolvimento usual, obtido primitivando a série geométrica:

$$\log(1 - w) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{w^k}{k}, \quad |w| < 1. \tag{8.3.1}$$

Para $|w|$ suficientemente pequeno temos $|\log(1-w)| \leq C|w|$ para certa constante real C. De facto, por exemplo, para $|w| < \frac{1}{2}$ temos:

$$|\log(1-w)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{w^k}{k}\right| = |w| \left|1 + \frac{w}{2} + \frac{w^2}{3} + \cdots\right| \leq \tag{8.3.2}$$

$$\leq |w| \left(1 + \frac{|w|}{2} + \frac{|w|^2}{3} + \cdots\right) \leq$$

$$\leq |w|(1 + |w| + |w|^2 + \cdots) = \frac{|w|}{1-|w|} \leq 2|w|. \tag{8.3.3}$$

(a última desigualdade segue do facto de que $\frac{x}{1-x} \leq 2x$ para $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$).

Lema 8.10. *Se $\{z_n\}$ é uma sucessão de números complexos não nulos e $\sum_{n\in\mathbb{N}}(1-z_n)$ converge absolutamente, então $\prod_{n\in\mathbb{N}} z_n$ converge absolutamente.*

Demonstração. Como vimos na Observação 8.9, para n suficientemente grande $|1-z_n| < \frac{1}{2}$, pelo que é $|\log z_n| \leq 2|1-z_n|$, de acordo com a estimativa acima (pondo $w = 1-z_n$). Assim, a convergência absoluta de $\sum_{n\in\mathbb{N}}(1-z_n)$ implica a de $\prod_{n\in\mathbb{N}} \log z_n$. A convergência de $\prod_{n\in\mathbb{N}} z_n$ segue-se por definição. □

Proposição 8.11. *Seja $\{f_n\}$ uma sucessão de funções holomorfas numa região Ω tal que*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}(1-f_n(z))$$

converge uniformemente e absolutamente em compactos $K \subset \Omega$. Então o produto $\prod_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformemente e absolutamente em compactos de Ω e define uma função holomorfa $F(z)$ em Ω.

Demonstração. Cobrindo K com um conjunto finito de discos fechados de raio suficientemente pequeno, tirando partido da compacidade de K, podemos assumir que K é um disco fechado. Escrevemos

$$f(z) = \prod_{n=1}^{N-1} f_n(z) \prod_{n=N}^{\infty} f_n(z),$$

com N escolhido de modo a que $\sum_N |1-f_n(z)| < 1$ para todo o $z \in K$. Então a série $\sum_N^\infty |\log f_n(z)|$ converge uniformemente em K, pois as determinações do logaritmo estão bem definidas. Logo $\sum_N^\infty \log f_n(z)$ converge absolutamente e uniformemente, o que define $F(z) = \left(\prod_{n=1}^{N-1} f_n(z)\right) e^{\sum_N^\infty \log f_n(z)}$ como função holomorfa. □

O seguinte resultado é uma consequência.

Corolário 8.12. *Seja $K \subset \Omega$ um conjunto compacto. Sempre que $\{f_n\}$ sejam holomorfas e não tenham zeros em K, e $\sum_{n\in\mathbb{N}}(1-f_n(z))$ converge uniformemente e absolutamente em K, então $F(z) = \prod_{n\in\mathbb{N}} f_n(z)$ é holomorfa, e podemos escrever, para $z \in K$*

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)}.$$

Demonstração. A ideia é derivar a fórmula $\log F(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \log f_n(z)$, tendo em atenção a convergência. Os detalhes deixam-se como exercício. □

8.4. O teorema de Weierstrass para funções inteiras

Os resultados anteriores são válidos para regiões arbitrárias. Quando a região é $\Omega = \mathbb{C}$ a informação sobre a localização dos zeros de uma dada função inteira f e do seu *crescimento no infinito* pode ser suficiente para determinar um desenvolvimento de $f(z)$ num produto infinito, como veremos.

Consideremos uma função inteira $f \in H(\mathbb{C})$. O princípio dos zeros isolados impõe que os zeros de $f(z)$ são no máximo numeráveis. Mais precisamente temos.

PROPOSIÇÃO 8.13. *Seja $f \in H(\mathbb{C})$ e seja $Z_f = f^{-1}(0)$ o seu conjunto de zeros. Então, ou Z_f é um conjunto finito, ou $\#Z_f = \#\mathbb{Z}$. Além disso podemos ordenar os elementos de Z_f de modo a escrever*

$$Z_f = \{z_1, z_2, \cdots\},$$

com $|z_1| \leq |z_2| \leq \cdots$. Em particular, quando Z_f não é finito, temos $\lim_{n\to\infty} |z_n| = \infty$.

DEMONSTRAÇÃO. O resultado decorre do facto de que cada compacto $\overline{\mathbb{D}(0,R)}$, com $R > 0$ arbitrariamente grande, tem um número finito de zeros. □

Seja $f(z)$ uma função inteira com zeros nos pontos $z_1, z_2, \cdots$. De acordo com a Proposição vamos, sem mais comentários, ordenar os seus zeros não nulos de modo a ter $|z_1| \leq |z_2| \leq ....$ Tentemos então uma representação da forma:

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right).$$

Este produto não converge necessariamente, por isso necessitamos de um factor de convergência.

DEFINIÇÃO 8.14. O **factor elementar de grau** $n \in \mathbb{N}$ (de Weierstrass) é a função inteira definida por

$$E_n(z) = (1 - z)e^{z + \frac{z}{2} + \ldots + \frac{z^{n-1}}{n-1}}.$$

(e $E_1(z) = 1 - z$).

LEMA 8.15. *Um factor elementare anula-se apenas no ponto $z_0 = 1$. Além disso:*

$$ord_1 E_n = 1,$$

para todo o n. Por outras palavras as funções E_n são inteiras com apenas um zero simples em $z_0 = 1$.

DEMONSTRAÇÃO. Elementar. □

LEMA 8.16. *Se $|z| \leq \frac{1}{2}$ então $|\log E_n(z)| \leq 2|z|^n$.*

DEMONSTRAÇÃO. Basta imitar a estimativa (8.3.2) usando o desenvolvimento 8.3.1:

$$\log E_n = \log(1 - z) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{z^k}{k} = -\sum_{k=n}^{\infty} \frac{z^k}{k},$$

pelo que $|\log E_n(z)| \leq |z|^n \frac{1}{1-|z|} \leq 2|z|^n$, como pretendido. □

LEMA 8.17. *Sendo $\{z_n\}$ um subconjunto numerável de $\mathbb{C}$, ordenado de forma a que $|z_1| \leq |z_2| \leq \cdots$, existe uma sucessão $\{p_n\}$ de números naturais tais que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{r}{|z_n|}\right)^{p_n}$ converge para todo $r > 0$. Em particular, podemos colocar $p_n = n$ para satisfazer esta condição.*

DEMONSTRAÇÃO. Colocando $p_n = n$ ficamos com

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{|z_n|}\right)^n \leq \text{soma finita } + \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{2^n},$$

uma vez que, para certo N suficientemente grande, $|z_n| \geq 2R$ para todo $n \geq N$. □

Vejamos agora a convergência dos produtos de factores elementares. Estes produtos são chamados *produtos canónicos*.

TEOREMA 8.18. *Seja $Z = \{z_n\}$ um conjunto numerável de $\mathbb{C}$, cujos elementos estão ordenados por $|z_1| \leq |z_2| \leq \cdots$, e seja $\{p_n\}$ uma sucessão de inteiros nas condições do lema ($\sum_{n\in\mathbb{N}} (r/|z_n|)^{p_n}$ converge para todo $r > 0$). Então o produto infinito*

$$\prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)$$

converge uniformemente em qualquer disco $|z| \leq R$ e define uma função inteira $F(z)$ com zeros simples apenas nos pontos de Z (não havendo outros zeros).

O resultado é também válido num sentido mais forte: se $\sum_{n\in\mathbb{N}} (r/|z_n|)^{p_n}$ converge para todo $r > 0$, mesmo considerando que há z_n's repetidos na soma, o produto acima converge, e a ordem de $F(z)$ em cada z_n é, então, igual ao número de vezes que z_n aparece no produto.

Demonstração. Fixamos $R > 0$. Seja N tal que $2R < |z_{N+1}|$. Então, para $|z| \leq R$ e $n > N$ temos $|z/z_n| < 1/2$. Estamos assim nas condições do Lema 8.16, pelo que

$$\left|\log E_{p_n}(\frac{z}{z_n})\right| \leq 2\left|\frac{z}{z_n}\right|^{p_n}.$$

Como a série dos termos da direita converge uniformemente, a dos termos da esquerda também, o que mostra a convergência do produto canónico. □

Exemplo 8.19. [A factorização do seno]. Consideremos a função inteira:

$$f(z) = \sin(\pi z),$$

cuja derivada logaritmica é a função meromorfa $f'(z)/f(z) = \pi \cot \pi z$. A função $f(z)$ tem zeros apenas nos pontos inteiros de $\mathbb{R}$: $Z_f = \mathbb{Z}$. Vamos ordená-los de acordo com a sua norma:

$$Z_f = \{0, 1, -1, 2, -2, \cdots\} = \{z_0, z_1, z_2, \cdots\}.$$

Fazendo $p_n = 2$, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $\sum_{n=1}^{\infty} (r/|z_n|)^2 < \infty$, para qualqer $r > 0$, pelo que o produto canónico:

$$g(z) := z \cdot \prod_{n=1}^{\infty} E_2(\frac{z}{z_n}) = z \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{k}\right) e^{z/k} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-z/k} = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right)$$

converge para todo o $z \in \mathbb{C}$ definindo uma função inteira, e tem os mesmos zeros de $f(z) = \sin \pi z$ com as mesmas multiplicidades. Assim, o quociente f/g é uma função inteira sem zeros. Assim, podemos escrever:

$$\frac{f(z)}{g(z)} = e^{h(z)}, \quad \text{ou } f(z) = e^{h(z)} g(z),$$

onde $h(z)$ é inteira, uma vez que $\mathbb{C}$ é simplesmente conexo. Derivando esta fórmula, obtemos:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{g'(z)}{g(z)} = h'(z).$$

Por outro lado, fazendo uso do Corolário 8.12, temos:

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{k=1} \frac{-2z/k^2}{(1 - z^2/k^2)} = \frac{1}{z} + \sum_{k=1} \frac{2z}{z^2 - k^2} = \pi \cot(\pi z) = \frac{f'(z)}{f(z)},$$

de acordo com o Teorema de Eisenstein. Assim, $h'(z) \equiv 0$, pelo que h é uma constante, que se pode determinar fazendo um limite. Obtemos, finalmente:

$$f(z) = \sin \pi z = \pi g(z) = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right).$$

Na próxima secção vamos ver que o mesmo tipo de representação pode ser obtido medindo o "crescimento" máximo da função "no infinito".

O Teorema 8.18 permite-nos garantir a existência de uma função inteira com zeros em pontos predeterminados, e com ordens prefixadas nesses pontos. Se $Z = \{z_n\}$ é um subconjunto de $\mathbb{C}$ para que ele seja o conjunto de zeros de uma função inteira é necessário que seja um subconjunto discreto de $\mathbb{C}$. Assim, sabemos que é numerável. Vamos tentar encontrar uma função inteira $f \in H(\Omega)$ apenas com zeros em Z e de tal forma que, para cada $z_k \in Z$ a ordem de f em z_k seja um natural $m(k)$. Por exemplo, se quisermos uma função $f(z)$ com zeros duplos em todos os pontos inteiros, podemos definir estes dados através do conjunto $Z = \mathbb{Z}$ e da função $m : Z \to \mathbb{N}$ dada por $m(z) = 2$ para todo o $z \in Z$.

Teorema 8.20. *(Weierstrass). Seja $Z = \{z_n\}$ um conjunto discreto e seja $\mu : Z \to \mathbb{N}$ uma função com valores inteiros positivos. Então existe uma função inteira $f \in H(\Omega)$ tal que $\mathrm{ord}_{z_k} f = \mu(z_k)$, e com $\mathrm{ord}_z f = 0$ sempre que $z \notin Z$.*

Demonstração. Usar os factores elementares $E_{p_n}(\frac{z}{z_n})$, com a sequência $\{p_n\}$ dada pelo Lema 8.17 (por exexmplo $p_n = n$), elevanto cada factor à potência $\mu(k)$. Se um dos elementos de Z é a origem $z_0 = 0 \in Z$, basta multiplicar tudo por $z^{\mu(z_0)}$. A convergência do produto assim obtido é garantida pelo Teorema 8.18. □

Proposição 8.21. *Qualquer função meromorfa em $\mathbb{C}$ é o quociente de funções inteiras.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $f \in M(\Omega)$, com conjunto de zeros e pólos dados por Z_f e P_f. Basta considerar a função $\mu_- : P_f \to \mathbb{N}$ dada pelo simétrico das ordens. Pelo teorema anterior, construimos uma função inteira g com as ordens dadas por μ_- e definimos a função inteira:

$$F(z) = f(z)g(z) \in H(\mathbb{C}).$$

Assim, $f = F/g$ como pretendido. □

8.5. O teorema de Hadamard

O teorema de Weierstrass permite mostrar a convergência de certos produtos canónicos, mas não nos dá informação sobre qual é o produto canónico que representa uma dada função. Nesta secção veremos um resultado muito mais pormenorizado, que establece uma representação em termos de produto infinito para uma grande classe de funções: as funções que não crescem no infinito mais que a exponencial de um polinómio.

DEFINIÇÃO 8.22. A ordem (de crescimento polinomial) de uma função $f \in H(\mathbb{C})$ é o número

$$\rho(f) = \lim_{R\to\infty} \frac{\log\log ||f||_R}{\log R} \in [0, +\infty]$$

onde $||f||_R := ||f||_{\overline{\mathbb{D}(0,R)}} = \max_{|z|=R} |f(z)|$. Quando $\rho(f) < +\infty$ diz-se que f tem ordem finita.

PROPOSIÇÃO 8.23. *(i) $\rho(f) = 0$ se f é polinómio.*
(ii) $\rho(\cos z) = \rho(e^z) = 1$
(ii) $\rho(E_k(z)) = k - 1$, sendo E_k o factor elementar de grau k.
(iii) $\rho(f \pm g) \leq \max\{\rho(f), \rho(g)\}$
(iv) $\rho(fg) \leq \max\{\rho(f), \rho(g)\}$

DEMONSTRAÇÃO. ... □

TEOREMA 8.24. *(Teorema da factorização de Hadamard). Seja f uma função inteira de ordem finita ρ, e seja $f^{-1}(0) \setminus \{0\} = \{z_1, z_2, \cdots\}$ o conjunto dos seus zeros (com a excepção de $z = 0$) repetidos de acordo com as suas multiplicidades e ordenados de acordo com*

$$0 < |z_1| \leq |z_2| \leq \cdots .$$

Então podemos escrever

$$f(z) = z^{\mathrm{ord}_0 f}\ e^{h(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E_k(\frac{z}{z_n}),$$

onde k é o menor inteiro $> \rho$ e $h(z)$ é um polinómio de grau $\leq \rho$.

Note-se que, uma vez assegurado que o produto converge absolutamente, podemos escrever, de forma algo mais intrínseca:

$$f(z) = z^{\mathrm{ord}_0 f}\ e^{h(z)} \prod_{w\in Z_f^*} \Big(E_k(\frac{z}{w})\Big)^{\mathrm{ord}_w f},$$

onde $Z_f^* = Z_f \setminus \{0\}$, onde $h(z)$ e k são como no enunciado acima.

DEMONSTRAÇÃO. ... □

8.6. Problemas

8.1 Prove que a função theta de Riemann, definida por

$$\theta(z,\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\pi i\tau n^2 + 2\pi i n z}$$

é uma função inteira (da variável $z \in \mathbb{C}$), para qualquer $\tau \in \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} :\ \Im z > 0\}$.

8.2 Mostre que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z+n} := \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2},$$

define uma função meromorfa em $\mathbb{C}$ com pólos simples nos pontos $n \in \mathbb{Z}$, e sem outras singularidades.

8.3 Suponha que $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ onde a convergência é uniforme em compactos numa região Ω. Mostre que, para todo o $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$, com o mesmo tipo de convergência.

8.4 Seja $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de funções holomorfas numa região Ω que converge, uniformemente em subconjuntos compactos $K \subset \Omega$ para uma função não constante f. Prove que, se cada f_n é injectiva, então o limite f é também injectivo.

8.5 Dadas duas funções inteiras f, g, mostre que:
(i) $\rho(fg) \leq \max\{\rho(f), \rho(g)\}$
(ii) $\rho(f \pm g) \leq \max\{\rho(f), \rho(g)\}$

8.6 Considere a função $f(z) = e^{2z}+e^{-2z}+2$. Verifique que f tem zeros nos pontos $z_n = \frac{i\pi}{2}(2n+1)$, e calcule a sua ordem. Determine a factorização de Hadamard de f.

8.7 Seja f uma função inteira de ordem 1 cujos zeros são simples e estão localizados nos inteiros impares. Supondo que f é par, e que $\lim_{z\to 0} f(z) = 1$, determine a factorização de Hadamard de f. Relacionando f com uma função conhecida mostre que

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{4}{(2n-1)^2}\right) = \frac{1}{3}.$$

8.8 Seja f uma função inteira e n um inteiro positivo. Prove que existe uma função inteira g tal que $g^n = f$ se e só se as ordens dos zeros de f são divisíveis por n.

8.9 Seja g uma função meromorfa em $\mathbb{C}$ com pólos de ordem ≤ 1 e resíduos inteiros. Mostre que existe $f \in M(\mathbb{C})$ tal que $g = f'/f$.

8.10 Mostre que $M(\mathbb{C})$, o corpo das funções meromorfas em $\mathbb{C}$, é o corpo das fracções do domínio de integridade $H(\mathbb{C})$.

CAPíTULO 9

Funções Elípticas

Neste capítulo vamos estudar uma classe de funções que generaliza as funções trigonométricas e que tem imensas aplicações tanto em outras áreas da matemática, nomeadamente em teoria dos números, geometria, etc, bem como em matemática aplicada a sistemas dinâmicos e mecânica analítica. Estas funções, chamadas funções elípticas, são duplamente periódicas, isto é periódicas em relação a dois períodos não colineares no plano complexo.

9.1. Recticulados e Funções invariantes

Definição 9.1. Um *recticulado* Λ em $\mathbb{C}$ é um subgrupo discreto do grupo abeliano $(\mathbb{C}, +)$.

Exemplo 9.2. (0) $\{0\}$ é o recticulado trivial
(1) $\mathbb{Z}$ é um recticulado em $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
(2) $\mathbb{Z} \oplus i\,\mathbb{Z} = \{m + ni : m, n \in \mathbb{Z}\}$ é o recticulado dos chamados inteiros de Gauss.

Como subgrupo abeliano, qualquer recticulado é um módulo sobre $\mathbb{Z}$. Isto significa que qualquer elemento $\lambda \in \Lambda$ se pode escrever como $\lambda = \sum c_i v_i$ com $c_i \in \mathbb{Z}, \quad v_i \in \mathbb{C}$. Os elementos v_i são chamados geradores de Λ. Do facto de que Λ é discreto resulta que qualquer recticulado em $\mathbb{C}$ pode ser gerado por um número finito n de geradores. De facto, pode-se mesmo provar que basta ter $n \leq 2$. Se Λ é gerado por $v_1, ..., v_n \in \mathbb{C}^*$ escrevemos frequentemente, $\Lambda = \mathbb{Z}v_1 \oplus \mathbb{Z}v_2 \oplus ... \oplus \mathbb{Z}v_n$ ou, abreviadamente, $\Lambda = \langle v_1, v_2, ..., v_n \rangle$.

Proposição 9.3. *Sejam $v_1, v_2 \in \mathbb{C}$ não nulos e $\tau = v_1/v_2$. Então, τ é um número complexo não real se e só se v_1 e v_2 são linearmente independentes como elementos de $\mathbb{R}^2$. Se $\tau \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ então*

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \{m_1 v_1 + m_2 v_2 : m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\}$$

é um recticulado em $\mathbb{C}$. Por outro lado, se τ é real, então o conjunto definido acima é um recticulado se e só se τ é racional. Finalmente, qualquer recticulado em $\mathbb{C}$ pode ser gerado por n geradores, com $n \leq 2$.

A primeira frase é imediata. A demonstração destes factos sobre recticulados pode ser encontrada no livro do Ahlfors, capítulo 7. Isto motiva a seguinte definição.

Definição 9.4. A dimensão de um recticulado é o número geradores que são linearmente independente sobre $\mathbb{R}$. Um recticulado maximal em $\mathbb{C}$ é um recticulado de dimensão 2.

Assim, qualquer recticulado maximal em $\mathbb{C}$ se pode escrever na forma:

$$\Lambda = \langle v_1, v_2 \rangle = \{m_1 v_1 + m_2 v_2 : \; m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\},$$

com $v_1, v_2 \in \mathbb{C}^*$ linearmente independentes sobre $\mathbb{R}$, isto é, $\tau = v_1/v_2 \notin \mathbb{R}$.

Definição 9.5. Seja Λ um recticulado em $\mathbb{C}$. Dois números complexos $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ dizem-se congruentes módulo Λ se $z_1 - z_2 \in \Lambda$. Um polígono fundamental P do recticulado maximal $\Lambda = \langle v_1, v_2 \rangle$ é um conjunto da forma

$$P_{z_0} = \{z_0 + t_1 v_1 + t_2 v_2 : t_1, t_2 \in [0, 1[\},$$

para certo $z_0 \in \mathbb{C}$.

É imediato verificar que a relação de congruência (módulo Λ) é uma relação de equivalência. É igualmente claro que, fixando um polígono findamental P_{z_0} para Λ, para todo $w \in \mathbb{C}$, existe um único z em P_{z_0} que é congruente a w módulo Λ. Desta forma, podemos dizer que P_{z_0} parametriza as classes de congruência módulo Λ.

Definição 9.6. Uma função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é dita *invariante* em relação ao recticulado Λ, se $f(z_1) = f(z_2)$, sempre que $z_1 - z_2 \in \Lambda$, isto é se z_1 e z_2 são congruentes módulo Λ.

EXEMPLO 9.7. (1) Como exemplos de funções invariantes em relação a recticulados unidimensionais temos as funções trigonométricas. Por exemplo, sen$z$ e cos$z$ são invariantes em relação a $\Lambda = 2\pi\mathbb{Z}$. Outro exemplo é a função exponencial, que é invariante em relação a $2\pi i\mathbb{Z}$.

(2) As funções anteriores são inteiras. Também temos exemplos conhecidos de funções meroformas em $\mathbb{C}$ e invariantes em relação a recticulados. Por exemplo a função tangente $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$ é meromorfa e invariante relativamente a $\pi\mathbb{Z}$.

A seguinte proposição é imediata e deixada ao leitor:

PROPOSIÇÃO 9.8. *Se Λ é um recticulado maximal gerado por v_1, v_2, uma função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é invariante em relação a Λ se e só se $f(z) = f(z + v_1) = f(z + v_2)$, para todo o $z \in \mathbb{C}$.*

9.2. Funções elípticas

DEFINIÇÃO 9.9. Uma *função elíptica* é uma função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ meromorfa invariante em relação a um recticulado maximal (de dimensão 2).

Como vimos acima, um polígono fundamental para Λ parametriza as classes de congruência módulo Λ, e portanto uma função elíptica é determinada pelos valores que assume num único polígono fundamental. Podemos então provar o seguinte.

9.2.1. Os teoremas de Liouville.

TEOREMA 9.10. *(1º teorema de Liouville) Qualquer função elíptica holomorfa é constante.*

DEMONSTRAÇÃO. Se $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é elíptica relativamente a Λ e holomorfa, então é contínua em $\mathbb{C}$ e portanto limitada num polígono fundamental P_{z_0} e no seu fecho. De facto, tanto $\Re f$ como $\Im f$ são funções contínuas que atingem máximos e mínimos em $\overline{P_{z_0}}$. Isto implica que f é limitada em todo o $\mathbb{C}$, uma vez que a sua invariância relativamente a Λ impõe $f(\mathbb{C}) = f(P_{z_0})$. Logo, pelo teorema de Liouville, f é constante. □

Este resultado mostra que, para obtermos funções analíticas (em alguma região) que sejam duplamente periódicas e minimamente interessantes, não nos podemos restringir às funções holomorfas. Por outro lado, não é nada óbvio, à partida, que existam funções elípticas não constantes. Na próxima secção vamos construir explicitamente um exemplo, a chamada função $\wp$ de Weierstrass, de uma função elíptica não trivial, para qualquer recticulado maximal.

Por agora, vamos assumir que as funções elípticas não constantes (e portanto meromorfas em $\mathbb{C}$) existem, e vejamos que propriedades podem ter. Em primeiro lugar, não é difícil provar que o conjunto das funções elípticas invariantes em relação a um recticulado maximal fixo Λ, formam um corpo. Vamos designar este corpo por $E(\Lambda)$ e chamar aos seus elementos funções elípticas relativas a Λ.

TEOREMA 9.11. *Para toda a função elíptica $f \in E(\Lambda)$ existe um polígono fundamental P para Λ, tal que f não tem zeros nem polos na sua fronteira ∂P.*

Naturalmente, o mesmo resultado é válido se substituirmos a expressão "zeros nem pólos" por apenas "pólos".

Fixemos, de agora em diante, um recticulado maximal Λ.

TEOREMA 9.12. *(2º teorema de Liouville) Seja f uma função elíptica relativa a Λ, e seja $P = P_{z_0}$ um polígono fundamental tal que f não tem pólos na sua fronteira ∂P. Então a soma dos resíduos de f no interior de P é zero.*

DEMONSTRAÇÃO. Como $\overline{P}$ é compacto, só existe um número finito de polos z_k no interior de P. Assim, pelo teorema dos resíduos, temos

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f, z_k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial P} f(z)\, dz = 0,$$

onde se usou o facto de que os valores de f na fronteira de P, são os mesmos em lados opostos de ∂P. □

Como primeira consequência, temos.

COROLÁRIO 9.13. *Uma função elíptica não constante tem pelo menos 2 pólos (contados de acordo com as suas multiplicidades) num polígono fundamental.*

Demonstração. Se $f \in E(\Lambda)$ tem apenas um pólo simples z_0 num polígono fundamental, então $\mathrm{Res}_{z_0} f \neq 0$, contrariando o teorema. $\square$

Teorema 9.14. *Seja novamente $f \in E(\Lambda)$, e $P = P_{z_0}$ um polígono fundamental tal que f não tem zeros nem pólos na sua fronteira ∂P. Então, o número de zeros de f no interior de P é igual ao número de polos de f no interior de P, contados de acordo com as respectivas multiplicidades.*

Demonstração. Começamos por notar que, se f é elíptica relativamente a Λ, f' e f'/f também o são. Assim, $\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial P}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = 0$ pelo teorema anterior, onde P é um polígono fundamental cuja fronteira não tem zeros nem pólos de f (pelo que não tem pólos de f'/f). O resultado é então uma consequência directa do principio do argumento. $\square$

A seguinte propriedade é agora fácil de concluir.

Corolário 9.15. *Uma função elíptica não constante f toma qualquer valor complexo, isto é a imagem de f é $\mathbb{C}$.*

Demonstração. Sejam dados $f \in E(\Lambda)$ não constante e $w \in \mathbb{C}$. Definimos $g(z) = f(z) - w$ que é meromorfa e tem os mesmos polos (com mesmas multiplicidades) que f. Como g tem pelo menos dois pólos em P, g tem pelo menos dois zeros (contados com multiplicidades). Logo, existe um zero de g, que é um ponto $z \in \mathbb{C}$ tal que $f(z) = w$. $\square$

Teorema 9.16. *(3^{o} teorema de Liouville) Se z_k, w_k são os zeros e polos de f e as multiplicidades são $m_k = ord_{z_k} f$ e $n_k = -ord_{w_k} f$, respectivamente, então:*

$$\sum m_k z_k \quad = \quad \sum n_k w_k \pmod{\Lambda}$$

Demonstração. Temos $\int_{\partial P} z\frac{f'(z)}{f(z)}dz = 2\pi i\left[\sum_{k=1}^{n} n_k w_k + \sum_{k=1}^{n} m_k z_k\right]$, pelo princípio do argumento generalizado aplicado à função $g(z) = z$. Integrando ao longo de ∂P, obtemos 4 integrais, dois dos quais dão o valor:

$$\int_x^{x+v_1} z\frac{f'(z)}{f(z)}dz - \int_{x+v_2}^{x+v_1+v_2} z\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \int_x^{x+v_1} z\frac{f'(z)}{f(z)}dz - \int_x^{x+v_1} (z+v_2)\frac{f'(z)}{f(z)}dz =$$

$$-v_2\int_x^{x+v_1} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = -v_1 I(f\circ\gamma, 0) = k_1 v_1,$$

onde γ é o caminho recto entre x e $x + v_1$. $f \circ \gamma$ é então uma curva fechada, logo $k_1 \in \mathbb{Z}$. Da mesma forma, os restantes dois integrais dão o valor $k_2 v_2$ onde $k_2 \in \mathbb{Z}$. $\square$

9.2.2. Os geradores de um recticulado. Vamos agora, só a título de curiosidade, abordar a seguinte questão. Dado um recticulado maximal, como encontrar os seus dois geradores. Mais concretamente, se $\Lambda = \langle v_1, v_2\rangle = \langle w_1, w_2\rangle$, qual a relação entre os pares de geradores $\{v_1, v_2\}$ e $\{w_1, w_2\}$. Recordemos então a seguinte definição. Uma matriz ou transformação linear é chamada unimodular se as entradas da matriz forem inteiras e tiver determinante igual a ± 1.

Teorema 9.17. *Quaisquer dois pares de geradores de um recticulado maximal Λ estão relacionadas por uma transformação unimodular.*

Demonstração. Se $\Lambda = \langle v_1, v_2\rangle = \langle v_1', v_2'\rangle$ então, exprimindo v_1', v_2' em relação a v_1, v_2 temos $\begin{bmatrix} w_2' \\ w_1' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_2 \\ w_1 \end{bmatrix}$ com $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in Mat_{2x2}(\mathbb{Z})$. Da mesma forma, $\begin{bmatrix} w_1' \\ w_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1' \\ w_2' \end{bmatrix}$; logo $\begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e portanto $\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \pm 1$. $\square$

Teorema 9.18. *Qualquer recticulado Λ é gerado por vectores w_1, w_2, tais que $\tau = w_2/w_1$ pertence ao seguinte conjunto $A = \left\{\tau \in \mathbb{H} : -\frac{1}{2} < \Re\tau \leq \frac{1}{2};\ |\tau| \leq 1;\ \ e\ \Re\tau \leq 0,\ \ se\ \ |\tau| = 1\right\}$.*

Demonstração. Como w_1 e w_2 são linearmente independentes sobre $\mathbb{R}$, temos $\mathrm{Im}\tau \neq 0$. Se $\mathrm{Im}\,\tau = \mathrm{Im}\left(\frac{w_2}{w_1}\right) < 0$ podemos trocar w_1 com w_2 e obter $\mathrm{Im}\,\tau > 0$. Podemos também assumir $|w_1| \leq |w_2|$ pois em caso contrário substituimos w_1 por w_2 e w_2 por $-w_1$ (isto preserva o sinal de $\mathrm{Im}\,\tau$). Finalmente, podemos substituir w_2 por $w_2 + nw_1$ para certo $n \in \mathbb{Z}$ de tal modo que $\left|\mathrm{Re}\left(\frac{w_2}{w_1}\right)\right| \leq \frac{1}{2}$

. Se $\operatorname{Re}\left(\frac{w_2}{w_1}\right) = -\frac{1}{2}$ substituitui-se w_2 por $w_2 + w_1$, e se $|\tau| = 1$ faz-se novamente a troca $w_1 \to w_2$, $w_2 \to -w_1$. Após estas substituições $\tau \in A$. □

Observação. Também se pode verificar que a escolha de τ em A é única, o que é equivalente a provar que o grupo $PSL(2, \mathbb{Z})$ é gerado por $\tau \mapsto \tau + 1$ e $\tau \mapsto = -\frac{1}{\tau}$, isto é, pelas matrizes $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

9.3. A função $\wp$ de Weierstrass de um recticulado Λ.

Vamos agora construir uma função elíptica com um único pólo duplo em pontos congruentes relativamente a $\Lambda = \langle w_1, w_2 \rangle$. Por simplicidade, tomemos este pólo na origem. Como um factor multiplicativo não interessa, a parte singular será $\frac{1}{z^2} + \frac{a}{z}$. Seja então

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + ...$$

Assim, a parte singular da função $f(z) = \wp(z) - \wp(-z)$ é igual a $\frac{1}{z^2} + \frac{a}{z} - \left(\frac{1}{z^2} - \frac{a}{z}\right) = \frac{2a}{z}$. Como $f(z)$ é claramente uma função elíptica em relação a Λ, e tem um pólo simples na origem, pelo corolário do teorema 1, f é constante; além disso, como $f\left(\frac{w_1}{2}\right) = \wp\left(\frac{w_1}{2}\right) - \wp\left(-\frac{w_1}{2}\right) = \wp\left(\frac{w_1}{2}\right) - \wp\left(\frac{w_1}{2}\right) = 0$, vemos que necessáriamente $f \equiv 0$, isto é, $\wp$ é uma função par, logo a sua expansão em torno da origem só tem potências pares e a sua parte singular é $\frac{1}{z^2}$. Em torno de qualquer ponto do recticulado $w \in \Lambda$, a parte singular será então $\frac{1}{(z-w)^2}$ o que nos leva a considerar a expressão $\sum_{w \in \Lambda} \frac{1}{(z-w)^2}$. Infelizmente, esta série não converge na região $\mathbb{C} \setminus \Lambda$ (ver exercícios). Para resolver este problema, Weierstrass notou que, mediante a inclusão de um certo termo neste somatório a convergência fica assegurada. Defina-se então, a função $\wp$ de Weierstrass pela fórmula:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{w \in \Lambda^*} \left[\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right],$$

onde $\Lambda^* = \Lambda \setminus \{0\}$ é o conjunto dos pontos não nulos do recticulado $\Lambda \subset \mathbb{C}$. Esta série converge em $\mathbb{C} \setminus \Lambda$ porque:

$$\left|\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right| = \left|\frac{z(2w-z)}{w^2(z-w)^2}\right| \leq \frac{10|z|}{|w|^3} \qquad \text{para} \qquad |z| \leq \left|\frac{w}{2}\right|.$$

Portanto, para verificar que $\wp$ está bem definida, basta ver que $\sum_{w \in \Lambda^*} = \sum \frac{1}{|w|^3} < \infty$. Isto decorre do facto de que existe $k > 0$ tal que $|w_1 w_1 + n_2 w_2| \geq k(|n_1| + |n_2|)$ $\forall_{n_1, n_2} \in \mathbb{Z}$. Logo

$$\sum_{w \in \Lambda^*} \frac{1}{|w|^3} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{|n_1|+|n_2|=n} \frac{1}{k^3(|n_1| + |n_2|)^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{k^3 n^3} < \infty.$$

Proposição 9.19. *(Propriedades das funções $\wp$ e $\wp'$ de Weierstrass)*
(1) *$\wp$ é duplamente periódica $\wp(z) = \wp(z + w_1) = \wp(z + w_2)$*
(2) *$\wp$ é par,*
(3) *$\wp'$é também uma função eliptíca e $\wp'(z) = -2\sum_{w \in \Lambda^*} \frac{1}{(z-w)^3}$,*
(4) *$\wp'(z)$ é ímpar e tem zeros apenas nos pontos que verificam $2z \equiv 0$ mod Λ.*
(5) *$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_z \wp(z) - g_3$, onde $g_2 = 60\sum_{w \in \Lambda^*} \frac{1}{w^4}$ e $g_3 = 140\sum_{w \in \Lambda^*} \frac{1}{w^6}$.*

Demonstração. A propriedade 2 é simples e a 3 decorre do facto que se pode derivar uma série uniformemente convergente termo a termo. Para provar 1, partimos da fórmula de 3; como $\wp'(z)$ é impar e claramente períodica, temos que existe uma constante c tal que $\wp(w_1 + z) = \wp(z) + c$ mas com $z = -\frac{w_1}{2}$ vem $\wp\left(\frac{w_1}{2}\right) = \wp\left(-\frac{w_1}{2}\right) + c$ o que implica $c = 0$ pois $\wp$ é par. A derivada de uma função par é ímpar, e o cáclulo dos zeros segue de

$$\wp'(\frac{w_1}{2}) = -\wp'(-\frac{w_1}{2}) = -\wp'(\frac{w_1}{2}),$$

por imparidade e invariância. Daqui decorre a propriedade (4) (detalhes deixados ao leitor). Para provar 5, considera-se a função zeta de Weierstrass (não confundir com a função zeta de Riemann):

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum_{w\in\Lambda^*}\left[\frac{1}{z-w} + \frac{1}{w} + \frac{z}{w^2}\right]$$

verifica-se que $\zeta(z)$ é meromorfa em $\mathbb{C}$ e $-\zeta'(z) = \wp(z)$. Escrevendo:

$$\frac{1}{z-w} + \frac{1}{w} + \frac{z}{w^2} = \frac{-1/w}{1-z/w} + \frac{1}{w} + \frac{z}{w^2} = -\frac{1}{w}\left(1 + \frac{z}{w} + \frac{z^2}{w^2} + ...\right) + \frac{1}{w} + \frac{z}{w^2} = -\frac{z^2}{w^3} - \frac{z^3}{w^4} - \cdots$$

e notando que $\sum_{w\in\Lambda^*}\frac{1}{w^k} = 0$ para k impar, por simetria em relação à origem, obtemos:

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum_{w\in\Lambda^*}\left(-\frac{z^2}{w^3} - \frac{z^3}{w^4} - \cdots\right) = \frac{1}{z} - \sum_{w\in\Lambda^*}\left(\frac{z^3}{w^4} + \frac{z^5}{w^6} + \cdots\right) = \frac{1}{z} - \sum_{k=2}^{\infty} g_k z^{2k-1}$$

onde $g_k = \sum_{w\in\Lambda^*}\frac{1}{w^{2k}}$.

Assim $\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=2}^{\infty}(2k-1)\,g_k z^{2k-2} = \frac{1}{z^2} + 3g_2z^2 + 5g_3z^4 + \cdots$

$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + 6g_2z + 20g_3\,z^3 + \cdots$

$\wp'(z)^2 = \frac{4}{z^6} - \frac{24g_2}{z^2} - 80g_3 + \cdots$

$\wp(z)^3 = \frac{1}{z^6} + \frac{9g_2}{z^2} + 15g_3 + \cdots$

onde as reticências indicam termos regulares não constantes (holomorfos). Concluimos que $h(z) = \wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 + 60g_2\wp(z) + 140g_3$ é uma função holomorfa elíptica logo ela é necessáriamente constante. Como o desenvolvimento em série de $h(z)$ tem o termo constante nulo, $h(0) = 0$ pelo que $h(z) \equiv 0$, que é a relação pretendida. □

A relação entre ℘ e a sua derivada é muito importante na resolução de certas equações diferenciais não lineares. Por exemplo, uma aplicação da função ℘ é a resolução explicita da equação de Korteweg-de Vries (KdV), que descreve ondas em água pouco profunda:

$$4\frac{\partial u}{\partial t} = 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$$

em que a incógnita é a função $u = u(x,t)$, onde x e t são a coordenada espacial e temporal, respectivamente. Para encontrar uma solução desta equação consideremos somente funções $u(x,t)$ que só dependem da quantidade $x - ct$, em que c é constante, e faç amos a mudanç a de variável: $u(x,t) = v(X) = v(x-ct)$. Nesta nova variável v, obtemos a equação $-4cv' = 6vv' + v'''$ (onde $'$ designa derivação em relação a X) e fazendo uma primitivação elementar obtemos $-4cv = 3v^2 + v'' + c_1$. Multiplicando por v', vem $-4cvv' = 3v^2v' + v''v' + c_1v'$ e fazendo outra primitiva vem: $-2cv^2 = v^3 + \frac{1}{2}(v')^2 + c_1v + c_2$, o que é equivalente a

$$\left(\frac{dv}{dX}\right)^2 = -2v^3 - 4cv^2 - 2c_1v - c_2$$

Comparando esta equação com a propriedade 4 da função ℘ de Weierstrass, obtemos uma solução explícita !!!

$$u(x,t) = -2\wp(x-ct) + c_3$$

onde ℘ é a função ℘ de Weierstrass associada a um recticulado que depende das constantes de integração c_1 e c_2.

Este tipo de soluções que dependem de $x - ct$ são soluções que possuem uma forma fixa e se movem com velocidade c. Assim, são chamadas solitões. Note-se que, fazendo $c_1 = c_2 = 0$, obtemos: $\left(\frac{dv}{dX}\right)^2 = -2v^3 - 4cv^2$. Esta equação mais simples pode ser resolvida por uma função do tipo:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}c\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{c}\,(x - ct - x_0)\right)$$

o que indica, mais uma vez que as funções elípticas são uma generalização das funções trigonométricas.

Voltando ao caso geral, note-se que temos uma relação implícita:

$$X = x - ct = \int_{-\infty}^{v} = \frac{ds}{\sqrt{-2s^3 - 4cs^2 - 2c_1s - c_2}} + c_4.$$

Este integral, tal como outros integrais da forma $\int \frac{p(x)}{\sqrt{q(x)}}dx$, onde $p(x)$ e $q(x)$ são polinómios, e $q(x)$ tem grau 3 ou 4, é chamado um integral elíptico, pois podem ser descritos em termos de funções elípticas, através de relações semelhantes à propriedade 4 da função $\wp$.

Foram precisamente os integrais deste tipo que motivaram inicialmente o estudo das funções elípticas; de facto, o comprimento de arco de uma elí pse no plano é dado por um integral deste tipo e é precisamente por esta razão que se resolveu dar às funções duplamente periódicas (que como vimos estão relacionadas com os integrais elí pticos) o nome de funções elípticas.

Finalmente, podemos acrescentar que, no caso em que $q(x)$ é um polinómio de grau superior a 4 os integrais $\int \frac{p(x)}{\sqrt{q(x)}}dx$ são chamados integrais hiperelípticos e a mesma equação KdV tem muitas outras soluçõs solitónicas, obtidas a partir de funções hiperelípticas, associadas a estes integrais.

9.4. Problemas

9.1 Recorde que a função $\wp$ de Weierstrass, relativa ao recticulado Λ gerado por dois períodos ω_1 e ω_2 é dada por:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{w\in\Lambda\setminus\{0\}} \left[\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right].$$

Prove que $\wp'(z)$ tem três zeros no polígono fundamental $P = \{t_1\omega_1 + t_2\omega_2 : 0 \leq t_1, t_2 < 1\}$, e que são todos simples.

9.2 Seja Λ um recticulado e $\sigma(z) = z\prod_{\omega\in\Lambda^*} E_3(\frac{z}{\omega})$, onde $E_3(w) = (1-w)e^{w+\frac{w^2}{2}}$. Mostre que σ é inteira, ímpar e que

$$\wp_\Lambda(z) = -\frac{d}{dz}\left(\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}\right).$$

9.3 Seja Λ um recticulado maximal em $\mathbb{C}$, e seja $\Lambda_2 := \{z \in \mathbb{C} : 2z \in \Lambda\}$. Mostre que se $f(z)$ tem zeros simples em $\Lambda_2\setminus\Lambda$ e polos triplos em Λ então $f(z) = c\wp'(z)$, para uma certa constante $c \in \mathbb{C}$.

9.4 Seja τ um número complexo com parte imagnária positiva. Considere a função de Jacobi $\vartheta(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n e^{2\pi inz}e^{\pi in(n+1)\tau}$ e assuma a convergência uniforme desta série em $\mathbb{C}$. (a) Mostre as relações:

$$\begin{aligned} \vartheta(z+1) &= \vartheta(z) \\ \vartheta(z+\tau) &= -e^{-2\pi i(z+\tau)}\vartheta(z) \\ \vartheta(-z) &= -e^{2\pi iz}\vartheta(z). \end{aligned}$$

(b) Use as relações acima para demonstrar que $\vartheta(z)$ tem zeros simples nos pontos do recticulado gerado por 1 e τ e que estes são os únicos zeros de $\vartheta(z)$ em $\mathbb{C}$.

9.5 Seja $\tau \in \mathbb{H}$, Λ o recticulado gerado por 1 e τ, e $\theta(z)$ uma função inteira ímpar que verifica

$$\begin{cases} \theta(z+1) = \theta(z) \\ \theta(z+\tau) = -e^{-2\pi iz-\pi i\tau}\,\theta(z), \qquad \forall z \in \mathbb{C}. \end{cases}$$

(a) Mostre que $\frac{d}{dz}\left(\frac{\theta'(z)}{\theta(z)}\right)$ é uma função elíptica em relação a Λ. (b) Mostre que $\theta(z)$ tem zeros simples nos pontos de Λ, que estes são os únicos zeros de $\theta(z)$ e que existe uma constante $c \in \mathbb{C}$ tal que $\wp(z) = -\frac{d}{dz}\left(\frac{\theta'(z)}{\theta(z)}\right) + c$, onde $\wp(z)$ é a função $\wp$ de Weierstrass relativa ao recticulado Λ.

CAPíTULO 10

Transformações conformes e o Teorema de Riemann

Neste capítulo mudamos um pouco a nossa perspectiva. Em vez das funções holomorfas, o objecto central são agora as *regiões do plano* e as suas propriedades. As funções holomorfas aparecem naturalmente, mas são vistas como *aplicações* de uma região para outra. Assim, o respectivo *contradomínio* é tão importante como o domínio, cabendo à função o papel de relacionar as duas regiões.

Quando duas regiões estão assim relacionadas por uma função holomorfa e bijectiva, então as regiões são chamadas *isomorfas*. Um dos problemas principais é encontrar critérios simples para determinar quando duas regiões dadas são isomorfas, e quando não o são.

10.1. Definição e Exemplos de Transformações Conformes

Neste capítulo, Ω_1, Ω_2, etc, designam regiões no plano complexo.

10.1.1. Definição de tranformação conforme. Devido ao teorema da aplicação aberta, todas as funções holomorfas *não constantes* são abertas. Assim, qualquer $f \in H(\Omega)$ não constante, determina uma nova região, a sua *imagem*: $f(\Omega) \subset \mathbb{C}$. Esta propriedade enquadra-se bem na noção geral de *categoria*.

Exercício 10.1. Mostre que, considerando que as regiões (em $\mathbb{C}$) são os *objectos*, e que as funções holomorfas não constantes $f \in H(\Omega)$ *são os morfismos entre* Ω *e* $f(\Omega)$, estamos a definir uma categoria, que designaremos por $\mathcal{H}ol$.

No caso particular em que $f \in H(\Omega)$ é *injectiva*, temos então o que chamaremos uma *transformação conforme entre* Ω *e* $f(\Omega)$.

Definição 10.2. (a) Um isomorfismo entre Ω_1 e Ω_2, também designado por transformação conforme entre Ω_1 e Ω_2, é uma aplicação $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ holomorfa e bijectiva. Dito de outra forma, $f \in H(\Omega_1)$ é injectiva, e $f(\Omega_1) = \Omega_2$ (ou $f^{-1}(\Omega_2) = \Omega_1$).

(b) Quando existe um isomorfismo entre Ω_1 e Ω_2, dizemos que Ω_1 e Ω_2 são (regiões) isomorfas e escrevemos $\Omega_1 \cong \Omega_2$.

Observação 10.3. Recorde-se que as duas condições (holomorfa e bijectiva) implicam que a função inversa $f^{-1} : \Omega_2 \to \Omega_1$ é também holomorfa, o que justifica que este tipo de aplicações se chamem isomorfismos (são, de facto, morfismos invertíveis na categoria $\mathcal{H}ol$ do exercício anterior).

Exercício 10.4. (a) Mostre que a relação de isomorfismo entre regiões é, de facto, uma relação de equivalência.
(b) Considere agora a subcategoria $\mathcal{C} \subset \mathcal{H}ol$ cujos objectos são os mesmos que em $\mathcal{H}ol$, mas cujos morfismos são transformações conformes. Mostre que $\mathcal{C}$ é, de facto, uma categoria, e que é um *grupóide* (todos os morfismos são invertíveis).

O nome transformação *conforme* justifica-se também porque uma aplicação $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ holomorfa e bijectiva verifica necessariamente $f'(z) \neq 0$ para qualquer ponto $z \in \Omega_1$. Desta forma, localmente, f preserva ângulos, de acordo com o capítulo 4. O seguinte exemplo mostra que o recíproco não é válido.

Exemplo 10.5. A aplicação $f : \mathbb{D}^* \to \mathbb{D}^*$, definida por $z \mapsto f(z) = z^2$ é holomorfa e verfica $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{D}^*$, mas não é uma transformação conforme entre $\mathbb{D}^*$ e $\mathbb{D}^*$ porque não é bijectiva neste conjunto. No entanto, a mesma expressão $f(z) = z^2$ representa uma transformação conforme entre o primeiro quadrante de $\mathbb{C}$ e o semiplano superior $\mathbb{H}$.

Este exemplo ilustra a enorme importância de considerar os conjuntos, para além da expressão *analítica* de $f(z)$. De facto, a aplicação $g(z) = \sqrt{z}$ (a inversa de f) representa uma transformação conforme entre o semiplano superior $\mathbb{H}$ e o primeiro quadrante de $\mathbb{C}$ mas, como sabemos, a expressão analítica de $g(z)$ não pode definir uma função holomorfa em $\mathbb{D}^*$.

10.1.2. Exemplos de transformações conformes. Devido ao teorema do isomorfismo local, sabemos que qualquer função $f(z)$ cuja derivada em z_0 não se anula é um isomorfismo, quando *restrita* a uma vizinhança suficientemente pequena.

Proposição 10.6. *Seja $f \in H(\Omega)$ e $z_0 \in \Omega$. Se $f'(z_0) \neq 0$ então, existe uma vizinhança $\Omega_1 \subset \Omega_2$ tal que $f : \Omega_1 \to f(\Omega_1)$ é uma transformação conforme.*

Demonstração. Deixada ao leitor. □

Desta forma, fica claro que as transformações conformes abundam! No entanto, nem sempre é fácil encontrar, simultaneamente, as três partes f, Ω_1 e Ω_2 que definem um isomorfismo $f : \Omega_1 \to \Omega_2$.

Exercício 10.7. Considere as quatro seguintes aplicações: $z \mapsto z^2$, $z \mapsto \sqrt{z}$, $z \mapsto e^z$, $z \mapsto \log z$. Encontre regiões explícitas para as quais as funções acima são transformações conformes. Naturalmente, para cada aplicação, a resposta está bem longe de ser única!

A noção de transformação conforme poderia ser estendida a regiões que não são subconjuntos de $\mathbb{C}$. Por exemplo, não é muito difícil ver que há transformações conformes definidas na esfera de Riemann.[1] Mais geralmente poderíamos definir morfismos ou isomorfismos para superfícies de Riemann, o que não faremos, por sair do âmbito deste livro.

Outra grande classe de exemplos de transformações conforme é obtida através de restrições.

Proposição 10.8. *Seja $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ uma transformação conforme. Então, para qualquer região $\Omega_3 \subset \Omega_1$ temos que $f|_{\Omega_3}$ é um isomorfismo entre Ω_3 e $f(\Omega_3)$.*

As transformações de Möbius, restritas a regiões em $\mathbb{C}$, fornecem muitos exemplos simples de isomorfismos.

Exemplo 10.9. Seja $T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \in Mob$ uma transformação de Möbius. Como $T'(z) \neq 0$ para qualquer ponto $z \in \mathbb{C}$ (com excepção do polo $z = -d/c$), se fizermos a restrição de T a qualquer região $\Omega \subset \mathbb{C}$ (que não contenha o polo) obtemos uma transformação conforme entre Ω e $T(\Omega)$.

Exercício 10.10. Uma transformação muito usada é $T(z) = \frac{i-z}{i+z}$. Mostre que, por restrição, esta fornece um isomorfismo entre $\mathbb{H}$ e $\mathbb{D}$, bem como um isomorfismo entre o primeiro quadrante (aberto) e $\mathbb{H} \cap \mathbb{D}$.

10.1.3. Isomorfismos e homeomorfismos. Uma pergunta natural é a seguinte. Dadas duas regiões Ω_1 e Ω_2, existirá alguma transformação conforme entre Ω_1 e Ω_2, isto é $f \in H(\Omega_1)$, injectiva com $f(\Omega_1) = \Omega_2$? Outras perguntas análogas são: Dada uma região Ω_1, quais as regiões Ω_2 que são isomorfas a Ω_1? É possível caracterizar todas as regiões isomorfas a uma região dada?

O conhecido teorema da aplicação de Riemann dá uma resposta a estas perguntas quando $\Omega_1 = \mathbb{D}$, um primeiro caso não trivial. Para começar, podemos rapidamente descobrir que nem todas as regiões do plano são isomorfas. Recorde-se que um homeomorfismo entre Ω_1 e Ω_2 é uma função contínua e bijectiva, com inversa também contínua.

Proposição 10.11. *Se Ω_1 e Ω_2 são isomorfas, então são homeomorfas. Dito de outra forma, se Ω_1 e Ω_2 não são homeomorfas, não existe nenhuma tranformação conforme entre Ω_1 e Ω_2.*

Demonstração. Se $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ é uma transformação conforme, então $f^{-1} : \Omega_2 \to \Omega_1$ é uma função holomorfa, e por isso contínua. Assim, f é um homeomorfismo, pois é contínua, bijectiva e com inversa contínua. □

Exemplo 10.12. As regiões $\mathbb{C}$ e $\mathbb{C}^*$ não são isomorfas. De facto, como existem caminhos não homotopicamente triviais em $\mathbb{C}^*$, mas $\mathbb{C}$ é simplesmente conexo, estas duas regiões não podem ser homeomorfas, nem conformemente equivalentes.

Apesar de tudo, as funções holomorfas são mais rígidas que as contínuas, pelo que é natural que o recíproco da proposição acima não seja válido. De facto, encontramos exemplos simples de regiões que são homeomorfas, mas que não são isomorfas.

Proposição 10.13. *As regiões $\mathbb{C}$ e $\mathbb{D}$, embora sejam homeomorfas, não são isomorfas.*

[1] De facto, uma transformação de Möbius é uma transformação conforme, para a qual as “regiões” domínio e contra-domínio são ambas iguais à esfera de Riemann $\mathbb{C}_\infty$.

Demonstração. Suponha-se que existe um isomorfismo $f : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$. Então f é inteira, mas também é limitada, pois $|f(z)| < 1$ para todo o $z \in \mathbb{C}$. Assim, pelo Teorema de Liouville, temos que f é constante, o que contraria a hipótese de f ser uma transformação conforme. Por outro lado, temos um homeomorfismo explícito entre $\mathbb{D}$ e $\mathbb{C}$ que pode ser dado por

$$z \mapsto \tan\left(|z|\frac{\pi}{2}\right) z.$$

Naturalmente, esta função não é holomorfa. □

10.2. Lema de Schwarz e Automorfismos do disco

Neste capítulo, veremos como dar uma resposta à seguinte pergunta: Quais as regiões do plano que são isomorfas ao disco unitário $\mathbb{D}$? A resposta é dada pelo célebre teorema da aplicação de Riemann. Para isso, comecemos por determinar os *automorfismos* do disco $\mathbb{D}$.

Definição 10.14. Dada uma região $\Omega \subset \mathbb{C}$, uma transformação conforme (ou isomorfismo) $f : \Omega \to \Omega$ é também designada um automorfismo de Ω.

Exercício 10.15. Seja Ω uma região. Mostre que $Aut(\Omega)$, o conjunto dos automorfismos de Ω é um grupo, com a operação de composição.

10.2.1. Lemas de Schwarz. A caracterização dos automorfismos de $\mathbb{D}$ é feita usando este importante Lema.

Teorema 10.16. *(Lema de Schwarz) Seja $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ uma função holomorfa com $f(0) = 0$. Então, $|f(z)| \leq |z|$ para todo o $z \in \mathbb{D}$; além disso, se $|f(z_0)| = |z_0|$ para certo $z_0 \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ então f é uma rotação, isto é, existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $f(z) = e^{i\theta} z$.*

Demonstração. Sendo

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

a expansão em série de potências de f, temos $a_0 = 0$, porque $f(0) = 0$. Assim, $g(z) = f(z)/z = a_1 + a_2 z + \cdots$ é uma função holomorfa em $\mathbb{D}$, e verifica, para $|z| \leq r < 1$,

$$|g(z)| = \left|\frac{f(z)}{z}\right| \leq \max_{|z|\leq r}\left|\frac{f(z)}{z}\right| = \max_{|z|=r}\frac{|f(z)|}{r} \leq \frac{1}{r},$$

usando o princípio do módulo máximo. Como isto é válido para qualquer $r < 1$ e $g(z)$ é contínua, segue que $|g(z)| \leq 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$.

No caso em que

$$|g(z_0)| = |\frac{f(z_0)}{z_0}| = 1$$

para algum ponto $z_0 \in \mathbb{D}$ no disco unitário, então a função holomorfa $g(z)$ atinge o máximo do seu módulo no interior do disco, pelo que $g(z)$ é igual a uma constante α de módulo 1, $\alpha = e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$, como queriamos provar. □

Teorema 10.17. *Seja $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ uma função holomorfa com $f(0) = 0$ e $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$ a sua expansão em série. Então, $|f'(0)| = |a_1| \leq 1$, e se $|a_1| = 1$ então $f(z) = a_1 z$.*

Demonstração. A primeira parte decorre de $f'(0) = \lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{z}$. Para a segunda parte consultar Lang. □

10.2.2. $Aut(\mathbb{D})$. Podemos agora determinar *todos* os automorfismos do disco.

Teorema 10.18. *Seja $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ uma função holomorfa e bijectiva. Por outras palavras, f é um automorfismo do disco. Então, escrevendo $\alpha := f^{-1}(0) \in \mathbb{D}$, existe um real θ tal que*

$$f(z) = e^{i\theta}\frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha} z}.$$

Demonstração. Seja $g_\alpha(z) = \frac{\alpha - z}{1-\bar{\alpha}z}$. Como g_α e f são automorfismos, a composição $F = f \circ g_\alpha^{-1}$ é também um automorfismo de $\mathbb{D}$, e verifica $F(0) = 0$. Pelo lemma de Schwarz $|F(z)| \leq |z|$, para todo $z \in \mathbb{D}$. Da mesma forma, para o automorfismo inverso $F^{-1} = g_\alpha \circ f$ temos a desigualdade $|F^{-1}(z)| \leq |z|$ ou seja $|w| \leq |F(w)|$, para todo $w \in \mathbb{D}$. Assim, temos $|F(z)| = |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$ o que implica, pelo lemma de Scwharz, que $F(z) = e^{i\theta} z$. □

Exercício 10.19. Mostre que $Aut(\mathbb{D})$ é isomorfo a $PSL(2, \mathbb{R})$, o subgrupo das transformações de Möbius com coeficientes reais.

10.3. Automorfismos do Plano

As aplicações da forma $z \mapsto az + b$, com $a, b \in \mathbb{C}$ são automorfismos do plano, quando $a \neq 0$. De facto, para $a \neq 0$ as funções da forma $f(z) = az + b$ são holomorfas e bijectivas entre $\mathbb{C}$ e $\mathbb{C}$. É interessante verificar que estas são as únicas transformações do plano em si mesmo com esta propriedade.

PROPOSIÇÃO 10.20. *Os únicos automorfismos do plano são da forma $z \mapsto az + b$, com $a \neq 0$.*

DEMONSTRAÇÃO. Usa o teorema de Casoratti-Weierstrass. □

10.4. O espaço métrico $C(\Omega)$

De modo a caracterizar todas as regiões isomorfas a $\mathbb{D}$, vamos necessitar de estudar a convergência de funções em $H(\mathbb{D})$, dotando este espaço vectorial de uma métrica. De facto, esta análise pode ser feita para qualquer região, pelo que estudaremos agora as propriedades métricas de $H(\Omega)$ e veremos que muitas provém das respectivas propriedades do espaço métrico $C(\Omega)$, das funções contínuas na região Ω.

Seja Ω uma região e seja $C(K)$ o espaço vectorial das funções contínuas $f : K \to \mathbb{C}$, onde K é um compacto em $\mathbb{C}$. Para ver $H(\Omega)$ como espaço métrico, recordemos primeiro que $C(K)$ é um espaço métrico com a distância dada pela norma do máximo:

$$||f||_K := \max_{z \in K}\{|f(z)|\}.$$

Uma métrica ou distância num conjunto X, verifica $d(x, y) = d(y, x) \geq 0$, $d(x, y) = 0$ sse $x = y$ e a desigualdade triângular $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$, para todo $x, y, z \in X$. Uma métrica num conjunto X induz nele uma topologia, pelo que podemos considerar X como espaço topológico e falar de subconjuntos abertos, fechados e compactos de X.

Comecemos pelo seguinte:

LEMA 10.21. *Dada uma região $\Omega \subset \mathbb{C}$, existe uma sequência de subconjuntos compactos $\{K_n\}$ tal que:*
(1) $K_n \subset int(K_{n+1})$
(2) $\Omega = \cup_n K_n$
(3) Se $K \subset \Omega$ é compacto, então $K \subset K_n$ para algum n.

A uma sucessão de compactos $K_n \subset \Omega$ verificando as propriedades acima chamaremos uma exaustão de Ω por conjuntos compactos.

PROPOSIÇÃO 10.22. *Seja Ω uma região e K_n uma exaustão de Ω por conjuntos compactos. O espaço das funções contínuas $C(\Omega)$ é um espaço métrico com a distância definida por:*

$$d(f, g) := \sum_n \frac{1}{2^n} \frac{||f - g||_n}{1 + ||f - g||_n}, \tag{10.4.1}$$

onde $||h||_n := ||h||_{K_n} = \max_{z \in K_n} |h(z)|$. Além disso, a topologia em $C(\Omega)$ (definida por esta métrica) não depende da escolha da exaustão K_n.

TEOREMA 10.23. *O espaço métrico $C(\Omega)$ é completo.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver Conway. □

Agora vejamos os teoremas de convergência de funções holomorfas. Nesta secção assumimos familiaridade com a noção de convergência uniforme em compactos, que é revista no Apêndice. A noção de convergência mais natural para regiões (conjuntos abertos e conexos) é a seguinte.

DEFINIÇÃO 10.24. Seja Ω uma região em $\mathbb{C}$ e $\{f_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, uma sucessão de funções contínuas em Ω. Dizemos que $\{f_n\}$ *converge uniformemente em compactos* de Ω, se para todo subconjunto compacto $K \subset \Omega$, a convergência de $\{f_n\}$ em K é uniforme, isto é, existe uma função $f : \Omega \to \mathbb{C}$ que verifica: para todo $\varepsilon > 0$ existe N tal que $||f_n - f||_K < \varepsilon$ para todo $n > N$. Neste caso dizemos que o limite uniforme de f_n é f.

Sabemos, pelo teorema da convergência uniforme, que o limite uniforme de uma sucessão de funções contínuas num compacto K é uma função contínua em K, o que implica o mesmo resultado para regiões em $\mathbb{C}$.

Exemplo 10.25. Seja $f_n(x) = x^{\frac{1}{n}}$ uma sucessão de funções definidas no intervalo $[0,1]$. O limite desta sucessão não é contínuo, e de facto a convergência não é uniforme em $[0,1]$. No entanto, a restrição de f_n a qualquer subconjunto compacto de $]0,1[$ tem um limite uniforme (a função nula nesse compacto).

Para a demonstração do teorema de Riemann vamos precisar de 3 definições e um Teorema.

Definição 10.26. Uma família (subconjunto) $A \subset C(\Omega)$ chama-se *normal* ou *relativamente compacta* se qualquer sequência em A tem uma subsucessão que converge uniformemente em qualquer compacto $K \subset \Omega$ para um elemento não necessariamente em A (mas necessariamente contínuo).

Observação 10.27. Mostra-se que esta noção corresponde ao fecho de A ser compacto no espaço métrico $C(\Omega)$, justificando a nomenclatura "relativamente compacto".

Definição 10.28. Uma família $A \subset C(\Omega)$ diz-se uniformemente limitada em compactos (ou metricamente limitada) se para todo subconjunto compacto $K \subset \Omega$ existe uma constante C_K tal que

$$||f(z)||_K \leq C_K$$

para todo $f \in A$.

A próxima definição é também útil.

Definição 10.29. Seja $K \subset \mathbb{C}$ um compacto. Uma família $A \subset C(K)$ diz-se equicontínua em K se dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|z_1 - z_2| < \delta$, $z_1, z_2 \in K$ implica que $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$ para todo $f \in A$.

Finalmente, recordemos o Teorema de Arzelà-Ascoli:

Teorema 10.30. *(Arzelà-Ascoli). Seja $A \subset C(K)$ uma família de funções contínuas. Se a sequência for uniformemente limitada e equicontínua, então A é relativamente compacta.*

Demonstração. Ver Conway. □

10.5. O teorema da aplicação de Riemann

O teorema da aplicação de Riemann diz-nos que qualquer região simplesmente conexa de $\mathbb{C}$, com excepção do próprio plano complexo, é isomorfa a $\mathbb{D}$. Esta excepção é necessária, como vimos na Proposição 10.13.

Teorema 10.31. *(Teorema da Aplicação de Riemann) Seja Ω uma região simplesmente conexa do plano complexo distinta de $\mathbb{C}$. Então Ω é isomorfa ao disco unitário $\mathbb{D}$. Mais precisamente, dado $z_0 \in \Omega$, existe uma única transformação conforme*

$$f : \Omega \to \mathbb{D}$$

que verifica $f(z_0) = 0$ e $f'(z_0) > 0$.

Observação 10.32. Este teorema tem duas partes. A unicidade é a parte mais simples.

Demonstração. [Demonstração da unicidade]: Seja $f_1, f_2 : \Omega \to \mathbb{D}$ com $f_1(z_0) = f_2(z_0) = 0$. Então, $f_1 \circ f_2^{-1}$ é um automorfismo do disco que fixa a origem $z = 0$, logo $f_1(f_2^{-1}(w)) = e^{i\theta}w$, para certo $\theta \in \mathbb{R}$ e para todo o $w \in \mathbb{D}$, pelo Lema de Schwarz. Escrevendo $w = f_2(z)$ temos

$$f_1(z) = e^{i\theta} f_2(z), \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Assim, temos também $f_2'(z_0) = e^{i\theta} f_1'(z_0)$. Sendo ambos $f_1'(z_0)$ e $f_2'(z_0)$ reais e positivos por hipótese, temos que $e^{i\theta} = 1$, pelo que $f_1(z) = f_2(z)$, $\forall z \in \mathbb{D}$ como pretendido. □

Para demonstrar a parte da existência no teorema de Riemann, vamos usar as propriedades métricas de $C(\Omega)$ e do subespaço métrico $H(\Omega)$, que tem a propriedade simpática de ser completo.

Corolário 10.33. *O espaço métrico $H(\Omega)$ é fechado em $C(\Omega)$ e portanto, também completo.*

Demonstração. O Teorema 8.4 diz-nos que quando uma sucessão convergente de funções $f_n \in H(\Omega)$ tem limite em $C(\Omega)$, então esse limite está em $H(\Omega)$. Isto significa, porque $C(\Omega)$ é um espaço métrico, que $H(\Omega)$ é fechado em $C(\Omega)$. □

O teorema de Arzelà-Ascoli afirma que, para funções contínuas em compactos, uma família uniformemente limitada e equicontínua é relativamente compacta. No caso de famílias de funções holomorfas, temos um resultado um pouco melhor.

Teorema 10.34. *Seja $A \subset H(\Omega)$ uma família uniformemente limitada em compactos. Então:*
(1) A é equicontínua em cada subconjunto compacto de Ω.
(2) A é relativamente compacta.

Demonstração. (1) Seja $K \subset \Omega$ e seja $3r$ a distância entre K e o complemento de Ω. Sendo $z_1, z_2 \in K$ com $|z_1 - z_2| < r$, temos

$$f(z_1) - f(z_2) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_C \frac{f(w)}{w - z_1}dw - \int_C \frac{f(w)}{w - z_2}dw\right) = \frac{z_1 - z_2}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{(w - z_1)(w - z_2)}dw,$$

onde $C = \partial\mathbb{D}(z_1, 2r)$. Para $w \in C$ temos $|w - z_1||w - z_2| > 2r^2$, pelo que

$$|f(z_1) - f(z_2)| < \frac{|z_1 - z_2|}{2\pi}\frac{\|f\|_{K^{+2r}}}{2r^2}4\pi r = \frac{1}{r}|z_1 - z_2|\,\|f\|_{K^{+2r}},$$

onde $K^{+2r} \subset \Omega$ é o compacto $\left\{z + 2re^{i\theta} : z \in \Omega, \theta \in \mathbb{R}\right\}$. Esta desigualdade implica a equicontinuidade em K.

(2) Pelo teorema de Arzelà-Ascoli, dada uma família uniformemente limitada e equicontínua A, qualquer sucessão em A tem uma subsucessão convergente em qualquer compacto. Essa subsucessão converge para uma função holomorfa, pelo Teorema 8.4

$\square$

Podemos agora, mostrar a parte da existência no teorema de Riemann.

Demonstração. Seja Ω uma região simplesmente conexa e distinta de $\mathbb{C}$ e $z_0 \in \Omega$.
Passo 1 - Mostrar que Ω é isomorfa a uma região contida em $\mathbb{D}$: Como $\Omega \neq \mathbb{C}$, sem perda de generalidade, há um ponto que não pertence a Ω, e podemos assumir que é a origem: $0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ (pois as translacções são isomorfismos). Como Ω é simplesmente conexa, $0 \notin \Omega$, a função

$$f(z) = \log(z) + C,$$

é holomorfa em Ω e injectiva. De facto, podemos definir f como o integral indefinido

$$f(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{z}, \quad e^{f(z)-C} = z,$$

que está bem definido e de modo a ter $f(z_0) = 0$ ($z_0 = e^{-C}$). Além disso, se $f(z_1) = f(z_2)$ então $e^{f(z_1)-C} = e^{f(z_2)-C}$ o que equivale a $z_1 = z_2$.

Temos também que $f(z_0) = 0$ e f não toma nunca o valor $2\pi i$, nem valores num círculo à volta deste valor. Isto porque se $f(z_\infty) = 2\pi i$ então como f não é constante, a imagem é aberta e existe sucessão de pontos $z_k \to z_\infty \in \Omega$ com $f(z_k) \to f(z_\infty) = 2\pi i$. Exponenciando, temos $z_k = e^{f(z_k)-C} \to e^{f(z_\infty)-C} = e^{f(z_0)-C} = z_0$ logo $z_k \to z_0$, o que é uma contradição, pois $z_0 \neq z_\infty$. Logo, a função

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - 2\pi i}$$

é holomorfa e limitada, pelo que usando uma translacção e homotetia, colocamos $g : \Omega \to \mathbb{D}$. Assim provámos que Ω é isomorfa a uma região em $\mathbb{D}$. Usando transformaçõe de Möbius da forma $\frac{z-\alpha}{1-z\bar{\alpha}}$ podemos também assumir que $0 \in \Omega$.
Passo 2 - Vamos considerar a família $\mathcal{F}$ que consiste nas funções

$$f : \Omega \subset \mathbb{D} \to \mathbb{D}$$

tais que $f \in H(\Omega)$, f é injectiva, e $f(0) = 0 \in \Omega$. Esta família é não vazia porque contém a aplicação identidade. Pelo Passo 1, reduzimos o teorema a mostrar que existe pelo menos uma função $f \in \mathcal{F}$ sobrejeciva. Primeiro considerarmos $f \in \mathcal{F}$ que não é sobrejectiva. Seja $w \in \mathbb{D}$ fora da imagem. Seja $T \in Mob$ com $T(w) = 0$. Então $T \circ f$ é isomorfismo entre Ω e subconjunto de $\mathbb{D}$ que não contém 0. Consideramos:

$$r(z) = \sqrt{T \circ f(z)} = e^{\frac{1}{2}\log T\circ f(z)}, \quad z \in \Omega.$$

r é injectivo porque $r(z_1) = r(z_2)$ implica $T \circ f(z_1) = z_2$ logo $z_1 = z_2$ pela injectividade de T e f. Sendo $\tilde{T}$ envia $\sqrt{T(f(0))}$ para 0 temos

$$g(z) = \tilde{T}(RTf(z)),$$

pelo que $f = T^{-1}S\tilde{T}^{-1}g$ não é injectivo. Pelo Lemma de Schwarz, $|T^{-1}S\tilde{T}^{-1}(0)| < 1$ pelo que $|g'(0)| > |f'(0)|$. Assim, encontrámos função $g \in \mathcal{F}$ com $|g'(0)| > |f'(0)|$.

Passo 3 - A família $\mathcal{F}$ é uniformemente limitada, pois $f(z) \leq 1$ para todo o $z \in \Omega$ e todo $f \in \mathcal{F}$. Além disso, pela fórmula integral de Cauchy

$$|f'(0)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it})}{r}dt\right| \leq \frac{1}{r}\max_{|z|=r}|f(z)|,$$

para certo $r > 0$ tal que $\mathbb{D}(0, r) \subset \Omega$, o que mostra que o valor de $|f'(0)|$ é limitado em $\mathcal{F}$.

Pelo passo 2, cada vez que $f_1 \in \mathcal{F}$ não é sobrejectiva, podemos construir $f_2 \in \mathcal{F}$ com derivada na origem superior em módulo, formando assim uma sucessão $f_n \in \mathcal{F}$. Como $\mathcal{F}$ é uniformemente limitada, estamos nas condições do Teorema 10.34 que garante que a família $\mathcal{F}$ é relativamente compacta. Assim, a sucessão $\{f_n\}$ tem uma subsucessão convergente e o limite $f \in \mathcal{F}$ será sobrejectivo, de modo a não contrariar o passo 2. A injectividade do limite segue do exercício 8.4. □

10.6. Problemas

10.1 Determine explicitamente uma transformação conforme entre o conjunto $A = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}z > 0, -\pi < \text{Im}z < \pi\}$ e o disco unitário $\mathbb{D}$.

10.2 Determine uma transformação conforme entre o conjunto $B = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}z > 0, \text{Im}z > 0, |z| < 1\}$, e o semiplano superior $\mathbb{H}$.

10.3 Seja f uma transformação conforme do primeiro quadrante $Q = \{z \in \mathbb{C} : \ \Re z > 0,\ \Im z > 0\}$ no disco unitário $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, com a propriedade $f(i+1) = 0$. Determine uma expressão para f. Existirá outra função com tais propriedades? Justifique.

10.4 Seja f holomorfa no disco unitário $\mathbb{D} = \mathbb{D}(0, 1)$ verificando $|f(z)| < 1$. Supondo que f tem dois pontos fixos distintos a e b em $\mathbb{D}$, $f(a) = a$ e $f(b) = b$, prove que $f(z) = z$ para todo $z \in \mathbb{D}$.

10.5 Mostre que qualquer função injectiva e holomorfa $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ é da forma $f(z) = az$ ou $f(z) = \frac{a}{z}$ para certo $a \in \mathbb{C}^*$.

10.6 [Fórmulas de Schwarz-Christoffel] Seja P um polígono (não necessariamente convexo ou limitado) com vértices $z_1, \cdots, z_n$ e ângulos exteriores $\pi\alpha_1, \cdots, \pi\alpha_n$, $\alpha_k \in]-1, 1[$. Prove que a função:

$$f(z) := c + k \cdot \int_{z_0}^{z} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{(w - x_k)^{\alpha_k}} dw,$$

para certas constantes $c, k \in \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{H}$, $x_k \in \mathbb{R}$, define uma transformação conforme entre $\mathbb{H}$ e P, e que pode ser extendida por continuidade a $\mathbb{R}$, satisfazendo $f^{-1}(z_k) = x_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \cdots, n$.

10.7 Seja $\{f_n\}$ uma sucessão de funções holomorfas numa região Ω, uniformemente limitada em compactos de Ω. Mostre que, se $\lim_{n\to\infty} f_n(z)$ existe para todo $z \in \Omega$, então $\{f_n\}$ converge uniformemente em subconjuntos compactos de Ω. (Sugestão, use o facto de que $\{f_n\}$ é equicontínua em compactos).

10.8 Seja $B = \{z \in \mathbb{C} : |Im\ z| < 1,\ |Re\ z| < 1\}$. Mostre que existe uma transformação conforme entre o conjunto $\mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{D}}$ e o conjunto $\mathbb{C}\backslash\overline{B}$.

CAPíTULO 11

Contínuação Analítica

Se f é holomorfa numa região $U \subset \mathbb{C}$ e V é outra região tal que $U \cap V$ é não vazio, podemos perguntar-nos se é possível estender f a uma função F holomorfa em $U \cup V$, de tal forma que $F_{|U} = f$. Neste caso dizemos que F é uma contínuação analítica de f.

Definição 11.1. Seja $\Omega_1 \subset \Omega_2$ uma inclusão de regiões com $f_1 \in H(\Omega_1)$, $f_2 \in H(\Omega_2)$. Quando temos:

$$f_1 = f_2|_{\Omega_1}$$

dizemos que f_2 é uma continuação analítica de f_1.

Observação 11.2. Por vezes, nomeadamente quando as regiões não são claramente identificadas pelo contexto, dizemos, na situação acima, que (f_2, Ω_2) é uma continuação analítica de (f_1, Ω_1).

Vamos ver dois tipos de continuação analítica: *através de curvas* e *ao longo de curvas.*

11.1. Princípio de Reflexão de Schwarz

O princípio de reflexão de Schwarz estuda a continuação analítica através de segmento de recta ou de arcos de circunferência.

Denotamos por $\widehat{\Omega} = \{\bar{z} : z \in \Omega\}$ a reflexão[1], ao longo do eixo real, da região $\Omega \subset \mathbb{C}$. Diz-se que Ω é simétrica em relação ao eixo real se $\Omega = \widehat{\Omega}$. Sejam $\Omega^+ = \Omega \cap \mathbb{H}$, $\Omega^0 = \Omega \cap \mathbb{R}$ e $\Omega^- = \Omega \backslash \overline{\Omega^+}$.

Teorema 11.3. *(i) Se f é holomorfa em Ω^+ e contínua em $\Omega^+ \cup \Omega^0$, com valores reais em Ω^0, então f tem uma continuação analítica única $F \in H(\Omega)$ definindo $F(z) = \overline{f(\bar{z})}$, para $z \in \Omega^-$. (ii) Se f é holomorfa em $\Omega^+ \cup \Omega^-$ e contínua em Ω, então f é holomorfa em Ω.*

Demonstração. Vamos provar (ii), uma vez que implica (i). Usa-se o teorema de Morera. $\square$

Seja $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ um caminho analítico (real), isto é, para todo $t_0 \in [a, b]$ existe uma série convergente

$$\gamma(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - t_0)^n$$

para qualquer t numa pequena vizinhança de t_0. Um arco analítico próprio é um caminho analítico simples com $\gamma'(t) \neq 0$ para todo $t \in [a, b]$. Seja $f \in H(\Omega)$ e γ um arco analítico próprio contido em $\partial\Omega$. Dizemos que f tem uma continuação analítica *através* de γ se existe uma vizinhança U de γ (excepto os seus extremos) tal que f tem continuação analítica para o conjunto $\Omega \cup U$.

Diz-se que Ω está de um lado de um arco analítico próprio γ na sua fronteira, se existe extensão analítica real bijectiva $\tilde{\gamma}$ de γ a uma vizinhança W de $[a, b] \subset \mathbb{C}$, de tal forma que $\tilde{\gamma}^{-1}(\Omega)$ está contido no semiplano superior ou inferior e $\tilde{\gamma}^{-1}(\gamma) \subset \mathbb{R}$.

Teorema 11.4. *Seja γ um arco analítico próprio contido em $\partial\Omega$, de tal forma que Ω está de um lado de γ. Seja f contínua em $\Omega \cup \{\gamma\}$ e holomorfa em Ω. Supondo que $f(\gamma)$ está contido num arco analítico próprio η de tal forma que $f(\Omega)$ está de um lado de η, então f tem uma continuação analítica através de γ.*

Exercício 11.5. Seja C um arco na circunferência unitária $|z| = 1$, e Ω uma região em $\mathbb{D}$ de tal forma que C é parte da sua fronteira. Se $f : \Omega \to \mathbb{H}$ é uma função holomorfa, contínua em C, e que toma valores reais nos pontos $z \in C$, mostre que a expressão $f(z) = \overline{f(1/\bar{z})}$ define uma continuação analítica de f através de C.

[1]Usamos $\widehat{\Omega}$ em vez de $\overline{\Omega}$ de modo a não haver confusão com o fecho de um conjunto.

11.1.1. A função modular e o Pequeno Teorema de Picard.

TEOREMA 11.6. *(Pequeno de Picard) Se f é uma função inteira cuja imagem omite dois ou mais pontos de $\mathbb{C}$, então f é constante.*

DEMONSTRAÇÃO. Podemos supor que os valores omitidos são 0,1. Usa-se então uma transformação conforme entre $\mathbb{H}$ e um triângulo em $\mathbb{D}$ e as reflexões de Schwarz no intervalo $[0,1]$ para constriuir uma função inteira que toma valores no disco $\mathbb{D}$, e que, pelo teorema de Liouville é forçosamente constante. □

11.2. Continuação Analítica ao Longo de Caminhos

Como vimos anteriormente, convém considerar os pares (f,U) em que U é uma região em $\mathbb{C}$ e $f \in H(U)$. Repetimos a definição de continuação analítica nesta terminologia, e numa situação um pouco mais geral.

DEFINIÇÃO 11.7. Sejam U,V regiões com intersecção não vazia de tal modo que $f \in H(U)$, $F \in H(U \cup V)$ e $f = F_{|U}$. Então, dizemos que $(F, U \cup V)$ é uma continuação analítica de (f,U) e também que $(F|_V, V)$ é uma continuação analítica *directa* de (f,U).

Note-se que a relação de continuação analítica directa é uma relação de equivalência.

DEFINIÇÃO 11.8. Seja $\gamma : [0,1] \to \Omega$ um caminho numa região Ω, e $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n+1} = 1$ uma partição do intervalo $[0,1]$. Se $\mathcal{D} = \{D_0, ..., D_n\}$ é uma sequência de discos de tal forma que $\gamma([a_j, a_{j+1}]) \subset D_j$, dizemos que $\mathcal{D}$ está associada a γ.

DEFINIÇÃO 11.9. Seja f analítica num disco D_0. Uma continuação analítica de (f, D_0) ao longo de uma sequência de discos $\mathcal{D} = \{D_0, ..., D_n\}$ associada a γ é uma sequência de pares

$$(f, D_0), (f_1, D_1), \cdots, (f_n, D_n)$$

tais que (f_{j+1}, D_{j+1}) é uma continuação analítica directa de (f_j, D_j), para todo $j = 0, ..., n-1$.

PROPOSIÇÃO 11.10. *(Unicidade de continuação analítica ao longo de caminhos) Seja $\gamma : [0,1] \to \Omega$ um caminho em Ω, e $\mathcal{D} = \{D_0, ..., D_n\}$ e $\mathcal{D}' = \{D_0, D_1', ..., D_m'\}$ duas sequências de discos associados ao mesmo caminho γ. Se (f_j, D_j) e (f_k', D_k') são duas continuações analíticas de $f = f_0 = f_0'$ então (f_m', D_m') é uma continuação analítica directa de (f_n, D_n).*

DEMONSTRAÇÃO. ... □

De acordo com esta proposição, a continuação analítica de uma função $f \in H(\Omega)$ ao longo de um caminho γ que comece num ponto de Ω, quando existe, é unica. Assim, podemos escrever f_γ para designar esta continuação analítica. Note-se que f_γ não é necessariamente uma função, mas uma sequência finita de funções! No entanto ... germes...

EXEMPLO 11.11. O logaritmo e as raízes... Fazer em particular a função $\sqrt{z}$.

TEOREMA 11.12. *Monodromia. Seja Ω uma região, $z_0 \in \Omega$, e seja $f \in H(\Omega)$ uma função que admite continuação analítica ao longo de qualquer caminho em Ω. Se γ e η são dois caminhos EF-homotópicos tendo z_0 como ponto inicial e w como ponto final então $f_\gamma = f_\eta$ numa vizinhança de w.*

CONCLUSÃO.

TEOREMA 11.13. *(de Schottky)...*

TEOREMA 11.14. *(Grande de Picard) Qualquer função inteira que não é polinomial, assume todos os valores complexos, com apenas uma excepção, um número infinito de vezes.*

11.3. Problemas

11.1 Seja C um arco na circunferência unitária $|z| = 1$, e Ω uma região em $\mathbb{D}$ de tal forma que C é parte da sua fronteira. Se f é uma função holomorfa em Ω, contínua em C e tal que $|f(z)| = 1$ para $z \in C$, mostre que a expressão $f(z) = 1/\overline{f(1/\bar{z})}$ define uma continuação analítica de f através de C. Defina a maior região onde tal continuação analítica está definida.

11.2 Deduza a fórmula para a relfexão na circunferência de equação $az\bar{z} + bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0$ (onde $b \in \mathbb{C}$, $a, c \in \mathbb{R}$, e $|b|^2 - ac > 0$) em função de a, b e c.

11.3 Seja f uma função holomorfa na faixa $U = \{z \in \mathbb{C} : -1 < \mathrm{Re} z < 1\}$. Mostre que são equivalentes as seguintes afirmações:

$$\begin{array}{ll} (i) & \mathrm{Re} z = 0 \Longrightarrow \mathrm{Re} f(z) = 1 \\ (ii) & f(-\bar{z}) + \overline{f(z)} = 2, \forall z \in U \end{array}$$

Construa uma aplicação conforme entre U e $\mathbb{D}$.

11.4 Seja $C_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ a circunferência de raio $r > 0$ centrada na origem, e F uma função inteira que verifica $F(C_1) \subset C_2$ e $F(C_2) \subset C_4$. Prove que $F(C_{2^k}) \subset C_{2^{k+1}}$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. Se F (restringido a $\mathbb{D}$) for uma transformação conforme de $\mathbb{D}$ em $\mathbb{D}(2) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$, prove que existe $c \in \mathbb{C}$ com $|c| = 2$, tal que $F(z) = cz$.

11.5 Seja $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ uma série cujo disco de convergência é $D = \mathbb{D}(0, R)$. Mostre que existe pelo menos um ponto na fronteira de D através do qual $f(z)$ não pode ser analiticamente continuado.

11.6 Seja Ω uma região e $D \subset \Omega$ um disco. Se $f(z)$ é holomorfo em D e $u = \Re(f)$ é harmónico em Ω, mostre que f pode ser analiticamente continuado ao longo de qualquer caminho em Ω.

11.7 Considere a função $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$. Verifique que $f(z)$ é holomorfa em $\mathbb{D}$ e mostre que não pode ser analiticamente continuado para nenhuma região que estritamente contenha $\mathbb{D}$.

Índice

aberta, 16, 39
aberto, 9
analítica, 21
anel, 12, 16, 27
automorfismo, 83

categoria, 81
compacto, 9
conexo, 9

diferenciável, 15, 21
Disco aberto, 9
disco de convergência, 17
distância, 9

eixo imaginário, 8
eixo real, 8
equações de Cauchy-Riemann, 20
equicontínua, 85
Essencial, 28

fechado, 9
função elíptica, 76

grau, 60

holomorfa, 20, 21

invariante, 75
isomorfismo, 81
isomorfismo local, 37

limitado, 9

$\mathbb{C}$-linear, 20
meromorfa, 29
metricamente limitada, 85
morfismo, 81

índice de uma curva fechada, 60

objecto, 81

pólo, 28
parte principal, 27
parte regular, 27
polinomio, 11–14
propriedade do valor médio, 23

raíz, 11
raio de convergência, 17
recticulado, 75
Região, 9
relativamente compacta, 85
Removível, 28

série convergente, 17
série de Laurent, 27
série de potências, 17
série de Taylor, 19
Série geométrica, 18
Semiplano superior, 9, 16
singularidade isolada, 28

teorema de Liouvile, 13
teorema fundamental da álgebra, 12
transformação conforme, 81
Transformação de Möbius, 33, 36

unidade imaginária, 7

Bibliografia

[1] Lars V. Ahlfors. *Complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1978. An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable, International Series in Pure and Applied Mathematics.

[2] Joseph Bak and Donald J. Newman. *Complex analysis*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, New York, third edition, 2010.

[3] A. F. Beardon. *Complex analysis*. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1979. The argument principle in analysis and topology, A Wiley-Interscience Publication.

[4] John B. Conway. *Functions of one complex variable. II*, volume 159 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995.

[5] Theodore W. Gamelin. *Complex analysis*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2001.

[6] Robert E. Greene and Steven G. Krantz. *Function theory of one complex variable*, volume 40 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2002.

[7] Serge Lang. *Complex analysis*, volume 103 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, fourth edition, 1999.

[8] Reinhold Remmert. *Theory of complex functions*, volume 122 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991. Translated from the second German edition by Robert B. Burckel, Readings in Mathematics.

[9] Walter Rudin. *Real and complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1987.